

“Self-Organized Criticality” (SOC; 自己組織臨界現象) という新奇な名前を冠して Bak-Tang-Wiesenfeld らの論文が Phys. Rev. Lett. 誌に登場したのは1987年。以来、ネーミングの斬新さもあって SOC の名前自体は世界中の物理学界へ急速に浸透した。地震のモデルとの関連で当初の予想を越えた展開もあり、発表論文数も最近急速に増えている。しかしながら、SOC の表す概念自体については第一線の現場でも完全に明確化されたとは未だ言えず、従ってそれが成功を収めつつあるのかどうか、まだ評価がはっきり定まっているわけではない。

1. 何でもフラクタル？

海岸線や川の形、星の分布、地震のマグニチュード分布、樹枝状結晶成長、抵抗を流れる電流の $1/f$ 揺らぎ、水の分子運動、太陽の黒点や大河川の流量・株価の変動、等々最近、世の中にフラクタル構造や冪乗分布を持つと言われはじめたものが溢れている。¹⁾ これらのものが“本当に全部フラクタルか？”ということについては議論もあるが、少なくともある範囲でフラクタル的に振舞うように見えるものがたくさんあることは事実だ。

フラクタル構造や冪乗分布には独特の性質があることはよく知られている。即ち、それらを測る尺度を変えても同じように見える、言い換えると、系に特徴的な大きさの尺度がないということだ。このように特徴的な大きさの無い系の状態を、統計物理屋は“臨界状態”と呼んで珍重してきた。こんないかめしい名前がつけられたのも、いくつかの例外を除いて、臨界状態が実現するのは相図でいくつかの相が接する点に対応し、例えば温度や磁場などの外部パラメータが特別な値（臨界値）にあるときに限ると信じられてきたからだ。

では、冒頭に上げたような多くの“臨界現象”は、すべて、たまたま“温度”が臨界点にあったために現われたのだろうか？

2. 自己組織臨界現象

そんなことはあるはずがない、裏にはきっと“自然の法則”が隠されているに違いない、いや、隠されていて欲しい、とだれでも考える。Bak-Tang-Wiesenfeld が普通以上だったのは、そんな素朴な思いに具体的なモデルを与え、それをもう少し洗練された形で表現したところだった。²⁾

即ち、系が時間発展して行くうちに自ら臨界状態に落ち着いて行くような一般的なメカニズムがある、というわけだ。ではそれはどんなメカニズムだろうか？

小さな箱に砂を平らに入れてみよう。当然砂はじっとしている。少し傾けてもすぐには崩れず、表面は斜めのまま頑張れる。しかし、あんまり傾けるといずれ斜面は崩れてより緩やかな状態に戻ってしまう（図1）。即ち、砂の表面の傾き θ には、あるしきい値 θ_{th} があって、それ以下では安定で任意の値でじっとしていられるが、それを越えると不安定になって崩れてしまう。もし、砂粒の慣性が無視できれば、ゆっくりと傾けて行くと、最初はそのまま傾いて行くが、傾き角 θ がしきい値 θ_{th} に達した後、表面の傾きは θ_{th} 付近に留まるだろう。即ち、安定状態と不安定状態の境界領域に吸い寄せられて行く。これは特徴的な大きさのない臨界状態か？

いや、我々はまだ系の空間的広がりを考えていなかった。そこで、砂の斜面の空間的広がりを考えにいれ、隣り合う部分間の相互作用を取り入れてみよう。

まっ平で大きな斜面全体が、しきい値 θ_{th} の傾きで傾けら

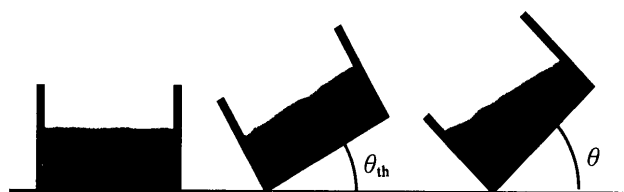


図1 砂の入った箱を傾けて行くと、ある角度 θ_{th} まではそのまま傾くが、それを越えると崩れる。

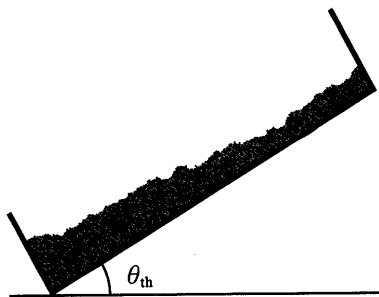


図2 表面のでこぼこした砂を傾けて行くと、傾き角 θ がしきい値 θ_{th} に達する前に局所的崩壊が起こり、 $\theta=\theta_{th}$ では平均の傾きはしきい値 θ_{th} より小さくなる。

れている状態を考えてみよう。この状態は、系全体としては極めて不安定であることがすぐわかる。どこかで発生した崩壊がたちまち全系に及び、斜面全体が崩れてしまう。任意の初期状態から徐々に傾けていった場合、系は一般にこのような状態には到達しない。

そこで、でこぼこしてはいるが、各部分の傾きがしきい値以下で安定な砂の表面を、徐々に傾けて行ってみよう(図2)。すると、最大傾斜角を持った部分が最初にしきい値 θ_{th} に達し、まずそこが崩れる。崩れた部分の傾きは緩やかになるが、その部分がえぐれるので、そのすぐ上側は逆に不安定化する。また崩れた砂粒は下流に移動するので、下側の傾きもまた大きくなる。その結果、場合によっては不安定領域は広がり、つぎつぎと崩壊が広がることもある。いわゆる雪崩現象である。^{*} 更にゆっくりと傾け続けると、断続的に大小さまざまな雪崩があちこちで発生する。系全体の平均的傾きは決して局所的しきい値 θ_{th} には達せず、それより小さなある傾き θ_c に全体として落ち着くだろう。そのような状態は統計的に安定で、そこでは起こりうる雪崩の大きさの分布が冪乗則に従う。即ち、臨界状態が実現している、というのがBak達のアイデアだ。

このように、特に外部パラメタを臨界点に調節しなくても、系が自ら臨界状態に発展して行くような現象を、彼らはSelf-Organized Criticality (SOC)、或いは、自己組織臨界現象と名付けた。

3. 砂山崩しのモデル

Bak-Tang-Wiesenfeld は、上のようなメカニズムで実際に臨界状態が実現することを示すために、単純なモデルを考えた。いわゆる砂山崩しのモデル (Sand Pile Model, SPM) である。²⁾

$L \times L$ の正格子点上に整数値を取る変数 S_i を考える。 S_i はサイト i での砂山の“傾き”を表しているとする。勾配は本来ベクトル量であるが、モデルを単純にするためにスカラーとしてしまった。この傾きがあるしきい値(ここでは3とする)以下の時にはそのサイトは安定であり、4以

上になると不安定になって崩れてしまうとする。

適当な安定状態、例えば全てのサイトで $S_i=0$ のまっ平状態から出発しよう。そして、系を少しずつ傾けていったときのダイナミクスを、次のようにモデル化する。

まず傾斜のプロセス (A)。系を傾けて行くと傾きは一樣に増加する。このモデルでは S_i を整数に限ってしまったので、全体をゆっくり一樣に傾けるプロセスをシミュレートするために、ランダムにサイトを選んでそのサイトの傾きを1だけ増やすという操作を繰り返すことにする。

このプロセス (A) を続けると、いずれどこかのサイトで傾きがしきい値3を越え不安定化する。そうすると今度は、次の崩壊のプロセス (B) で系を緩和させる。即ち、傾きが3を越えたサイトを i とすると、

$$S_i \rightarrow S'_i = S_i - 4$$

$$S_{i_n} \rightarrow S'_{i_n} = S_{i_n} + 1 \quad (i_n \text{ は } i \text{ の最近接格子点})$$

のように、サイト i の崩壊に伴いその傾きは減少するが、逆に隣接サイトの傾きは増加する。その結果、系は安定状態に戻ることもあるが、最近接格子点の傾きが新たに3を越え不安定状態になることもある。系が安定状態に戻った場合には、またプロセス (A) に戻る。まだ3を越えるサイトがある場合には、それらのサイトについてプロセス (B) を繰り返し、全てのサイトの変数が3以下になるまで行なう。安定状態に戻るとプロセス (A) に戻る。

このプロセス (B) では傾きの総和 $\sum S_i$ が保存している。これは傾きの総和が砂山の“高さ”に対応することのアナロジーによる。即ち、砂山の途中が崩れても全体の“高さ”は不変なのである。^{*} もちろん系の端のサイトが崩れれば“全体の高さ” $\sum S_i$ は減少する。これがプロセス (A) での砂粒の増加とつり合って、系は定常状態になるのである。

さて、上記のプロセスを交互に続けて行くと、いずれ統計的に定常な状態へ落ち着くが、そこではどのようなことが起こっているのか、シミュレーションで見てみよう。

プロセス (A) で任意に選んだサイトの傾きを一つ増すと、崩壊過程が起こるかも知れないし、起こらないかも知れない。また、崩壊する場合でも、崩れるサイトが一つだけのこともあるし、雪崩的に多くのサイトを巻き込むこともある。図3に、定常状態に達した後のある状態へ、傾きを一つ加えたときに生じる雪崩を幾つか示した。大きな

^{*} 本当の傾きはベクトルなので、保存するのは、砂山の麓から頂上までの傾きベクトルの線積分のはずである。このモデルは、あくまで砂山崩しのエッセンスを取り出そうとしたもので、2次元以上では実際の崩壊過程との対応はつかない。

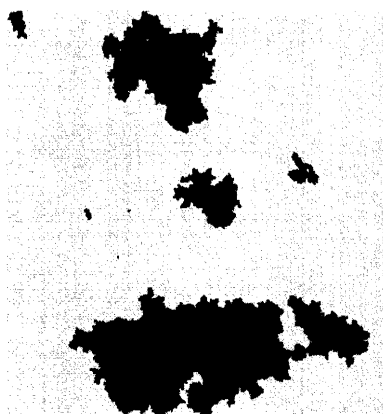


図3 定常状態にある系のあるサイトに一つ傾きを加えた場合、サイトによって様々なサイズの雪崩が発生する。

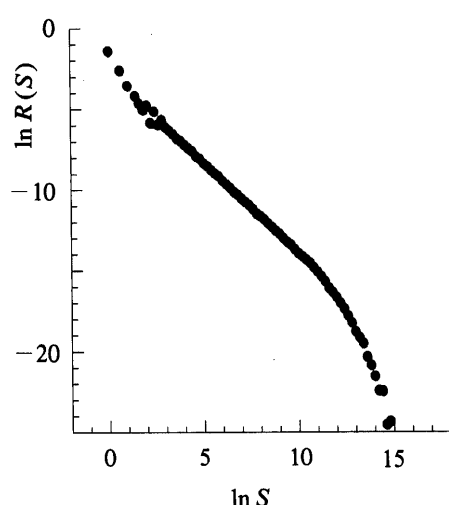


図4 砂山崩しのモデルにおける、雪崩の大きさ S の頻度分布 $R(S)$ の両対数プロット。 S の大きいところでのカットオフはシステムサイズが有限であることによる。システムサイズ 400×400 。

雪崩から小さな雪崩まで起こりうるということがわかる。1回の“雪崩”で崩壊したサイトの延べ数の統計を取ってみると、図4のように、きれいに冪乗則が成り立っていることが示される。即ち、Bakらの予想どおり、この系は自然に臨界状態に発展していったのである！

4. 地震のダイナミクス

こうしてSPMはSOCのアイデアどおり臨界状態をダイナミクスのアトラクターとして持つことが示された。但し、本物の砂山の崩壊はこのモデルのように起こらず、どうやらSOCは実現していないようだ。³⁾ 一方、少し見方を変え、SPMは以前から地震学者達によって調べられてきた地震のモデルに非常によく似たものだった。次にこれを見てみよう。

よく知られているように、大部分の地震はプレートの境界の断層の滑り運動として起こる。最も単純な場合として、

EARTHQUAKE FAULT



図5 断層付近のプレートの様子。アセノスフェア中の粘性流体の運動により、弾性体層がゆっくりと駆動されている。この図はJ. S. Langer氏によって描かれた(図中語は著者)。

繰り返し巨大地震を起こしている孤立した断層のスティック・スリップ運動を考よう。

断層の両側のプレートは、厚さ100 km程度の主に岩石からなる弾性体層(リソスフェアと呼ばれている)の板である。プレートは、その下の粘性流体層(アセノスフェア)の中のゆっくりとした対流によって、1年に数cmの速さで駆動されている。断層の上部はスムーズに滑らないので、二つのプレートが異なる方向に駆動されている場合、断層付近には徐々にストレスがたまって行く。ストレスが限界を越えたときに断層のスリップ運動が起こり、それが即ち地震というわけだ(図5)。

この断層に沿った1次元弾性体を考え、そのスティック・スリップ運動をモデル化する。

1次元弾性体を離散化し、バネとブロックの1次元鎖としてしまう。各ブロックは、板バネを通して一様速度(速さ v_p)で駆動されると同時に、もう一つのプレートの境界から摩擦力 F も受けている*(図6)。 i 番目のブロックの変位 u_i の運動方程式は

$$m\ddot{u}_i = k_c(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - k_p(u_i - v_p t) - F(\dot{u}_i) \quad (1)$$

と書ける。ここで、ドットは時間微分を表し、 m はブロックの質量、 k_c および k_p はバネ定数、 $F(\dot{u}_i)$ はブロックの速度に依存する摩擦力である。

これは、最後の摩擦力の項を除いてはよく知られた線形方程式で、解の振舞は単純である。唯一の非線形性は摩擦力にあり、それがこの系の複雑な振舞に決定的に重要であ

* プレートを駆動しているマントル対流のパターンは変動しているが、その時間スケールは地震の時間スケールと比べて大変長いので、マントルによる駆動は一定と見なされる。

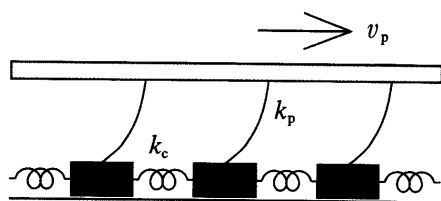


図6 ブロックとバネの一次元系.

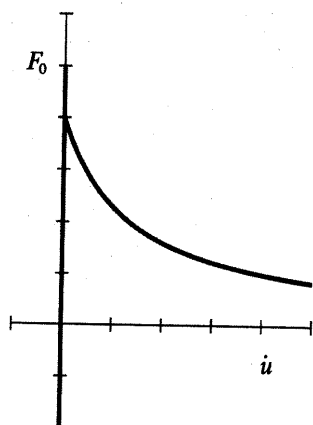


図7 速度減少型の摩擦関数 $F(\dot{u})$.

る。我々は、(1) 式の摩擦力 F として、静止摩擦と動摩擦からなるものを考えることにする。静止摩擦は、最大値 F_0 までの任意の値を取ることができ、動摩擦はブロックの速度の減少関数で $F \rightarrow 0$ ($\dot{u} \rightarrow \infty$) と仮定する (図7)。

(1) 式において m, k_c, k_p, F の i 依存性を考慮せず、断層に沿った系の不均一性を一切無視してしまった。実際の断層は明らかに多くの不均一性を持っているし、それが断層の運動に大きな影響を与えていないはずがない。しかし、不均一性を一切無視してもなお結構変化にとんだ運動をすることが、数値的に示される。

実は、このタイプの地震のモデルは、Burridge と Knopoff によって今から30年近くも以前に考えられており、⁴⁾ バネとスプリングによる地震のモデルは一般に Burridge-Knopoff モデル (BK モデル) と呼ばれている。上のように一次元で不均一性を無視し Newton 方程式に従うものは、Carlson と Langer らによって最近詳しく調べられた。⁵⁾

図8に典型的な系の時間発展を示す。横軸はブロックの番号、縦軸は各ブロックの変位を表し、静止状態ごとの配位をプロットしている。即ち、一番下の曲線は初期配位を表しており、系は上方に向かって速度 v_p でゆっくりと引き上げられて行く。時折いくつかのブロックが滑って新しい配置で静止する度に、新しい曲線を加えていって出来たのがこの図である。図中で大きな面積を囲む部分は、多く

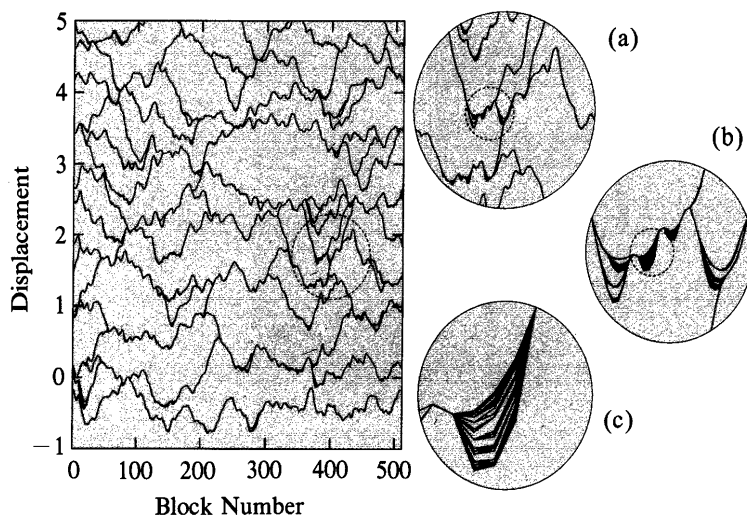


図8 BK モデルの系の配位の時間発展。全系が静止状態になるごとにプロットした。(a)は左図の破線の円の部分を拡大したもの。同様に、(b)及び(c)に、それぞれ(a)及び(b)内の一部を拡大した。摩擦関数 F を記述するパラメータは $\alpha = 2.0$, $\sigma = 0.01$ であり、 $k_c/k_p = 16$ 、システムサイズは 512。パラメータの詳細については文献5を参照のこと。

のブロックが同時に大きな変位を滑った事象を示し、大地震に対応する。細かなパターンは、小数のブロックが短い変位を滑る無数の小地震に対応する。

この図を眺めて二つのことが分かる。まず目につくのは、系の運動は空間的にも時間的にもカオティックである、ということだ。大きなパターンと小さなパターンが複雑に入り組んでいる。もとの系は全く一様で、運動法則にも確率的な要素は何もない。この見かけ上の無秩序さは、ひとえに、初期状態にある無限小の乱れを種にして、速度減衰型の摩擦のもつ不安定性によって拡大されたものである。

次の特徴は、地震の大きさの分布が非常に広いということである。図8の(a), (b), (c)を見てみよう。それらは、それぞれ一つ前の図中の破線でかこった部分を拡大したものである。小さなものは1ブロックだけが滑る地震から、大きなものは数百個のブロックが同時に滑る巨大地震まで生じていることがわかる。

地震の大きさを測る尺度として、図8においてその地震を表す曲線の囲む面積をとり、それを地震のモーメント m と呼ぶ。更に、このモデルの地震のマグニチュード μ をモーメントの自然対数で

$$\mu \equiv \ln m \quad (2)$$

のように定義する。実際の地震では、モーメントは地震によって放出されるエネルギーにほぼ比例することが経験的に知られている。

このマグニチュードに対するモデル系での地震の頻度分布を対数プロットしたのが、図9である。この分布は二つの部分からなっている。一つは小さなマグニチュード側に

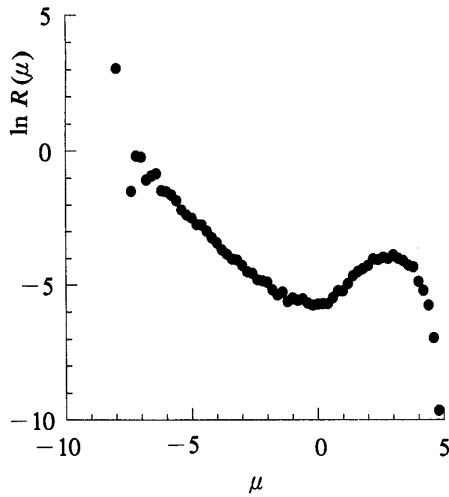


図9 一様なBKモデルにおける、地震のマグニチュード μ とその頻度 $R(\mu)$ の片対数プロット。 $\alpha=2.0, \sigma=0.01, k_c/k_p=16$, システムサイズ512. パラメタの詳細については文献5を参照のこと。

における直線状の部分で、もう一つは大きなマグニチュード側のこぶである。

直線部分はモーメントに対する頻度分布が冪乗則に従っていることを示し、この部分の小さな地震がモーメントでスケールされることを暗示している。そこでこの部分をスケール領域と呼ぼう。スケール領域は、実際の地震で観測されているマグニチュード頻度分布、即ち Gutenberg-Richter 則に酷似している。⁶⁾ この系のシミュレーションの結果によると、直線部分の傾き $-b$ は、系のパラメタのある範囲内でパラメタを変化させても一定で、 -1 に近い値を取ることが示されている。^{*)}

右側の大きなこぶは、大地震の頻度が、小さな地震からの外挿で予想されるよりもずっと大きいことを示している。実際の地震の統計では、このような大きなこぶは観測されていない。しかし、周期が数十年以上の大地震に対しては統計がまだ不十分な事もあり、地震学者によっては、本当はこのようなこぶがあると考えている人もいる。

このモデルの最も著しい特徴は、スケール領域での直線性が非常に良く安定していることであろう。しかし、なぜ冪乗則が現われるのかということに対して、理論はまだない。BKモデルには非一様性や確率過程を入れたものなど様々な変形版があるが、それらにもこのような冪乗分布が広く見られることが分かっている。

5. 地震の砂山モデル

ところでこのSPMとBKモデルは、次のように見るとよく似ている。⁷⁾ 即ち、BKモデルにおいてブロックの位置ではなくスプリングを通してブロックに働いている力、即ちストレス

$$s_i \equiv k_c(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - k_p(u_i - v_p t) \quad (3)$$

に注目しよう。すると、全てのブロックが静止しているときには、 $\{s_i\}$ はすべて F_0 以下で、時間と共に一様に増加する(プロセス(A))。時間がたつていずれかのブロックに働いているストレスが最大静止摩擦 F_0 に達すると、そのブロックは滑り出しストレスを解消しようとする。解消したストレスのうち、 k_c を通じた内力は両隣のブロックに分配され、 k_p を通じた外力は消失する。その結果いくつかのブロックが滑り、新しい配置で静止する。新しい配置では全てのストレスが F_0 以下である(プロセス(B))。しきい値のあるエレメントが格子点上に相互作用して並んでおり、それらをゆっくり駆動したという意味では、SPMと同様である。どちらも、定常状態の振舞はカオティックで、また冪乗則が現われる。

しかしSPMとBKモデルの冪乗則には大きな違いがある。SPMの冪乗則は大きなサイズの雪崩の方に延びていて、全系の大きさによってカットオフされている。このように系の大きさ無限大の極限で、いくらでも大きな雪崩が生じるのには、崩壊のプロセスにおいて変数 S_i の総和が保存することが重要と考えられていた。⁸⁾ 即ち S_i が境界以外では消滅できないので、傾斜のプロセスで増加した傾きは系の外まで“拡散”しなければならない。だから系の大きさと同程度の雪崩が発生するのだ、というわけだ。

一方、BKモデルにはストレスの保存則はない。Gutenberg-Richter 則は小さなマグニチュード側に延びている。カットオフは弾性体の離散化の単位と駆動速度 v_p で決まっている。この小さなマグニチュード側に延びる冪乗則は、巨大地震によって引き起こされた荒れたブロック配位が徐々にならされて行く過程で現われる。このように異なる二つの冪乗則が同列に論じられるべきものかどうかは、大いに疑問があるところではある。

そこで、両者のモデルの中間として、次のような“非保存SPM”を考えてみよう。⁹⁾ SPMと同様に正方格子点上に変数 s_i を考えるが、これは連続値を取るものとする。プロセス(A)では時刻 t とともに

$$s_i(t) = s_i^0 + t \quad (i: \text{全ての格子点}) \quad (4)$$

で一様に増加する。あるサイト i で変数がしきい値(1とする)に達すると、次のプロセス(B)では

$$s_i \rightarrow s_i' = 0$$

$$s_{i_n} \rightarrow s_{i_n}' = s_{i_n} + \frac{1}{Z} s_i \quad (i_n \text{ は } i \text{ の最近接格子点})$$

を全てのサイトで変数の値が1より小さくなるまで繰り返す。

* この図は地球物理の習慣にしたがって、マグニチュードに対する頻度分布をプロットした。モーメントにたいしてプロットすると、スケール領域の傾きは $-(b+1)$ となることに注意。

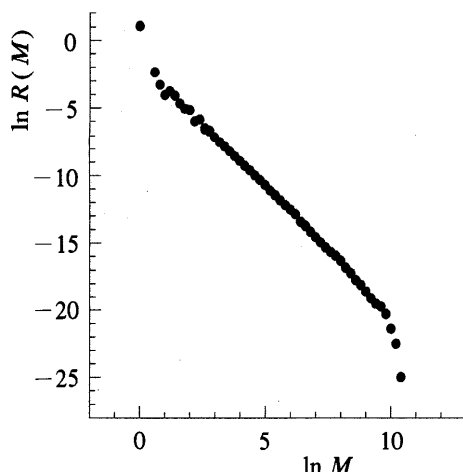


図10 非保存 SPM におけるイベントサイズ M と頻度 $R(M)$ の両対数プロット. $\Delta=0.8$, システムサイズ 200×200 .

えす. ここで Z は最近接格子点の数, Δ はゼロから 1 の間の定数とする. この Δ はプロセス (B) における変数の総和 $\sum s_i$ の保存の程度を表す. 即ち, $\Delta=1$ では $\sum s_i$ は保存するが, $\Delta < 1$ なら崩壊のたびに減少する. BK モデルとの対応でいえば, $\Delta=1/(1+k_p/(k_c Z))$ となる.

このモデルは, 全くの決定論的時間発展をし, SPM のような確率論的要素はない. また, BK モデルにおける速度減少型の動摩擦のような, 動力学的な不安定性があるわけでもない. それにもかかわらず, 系の振舞はカオティックで, また“地震”の大きさの分布は冪乗則に従うことが数値的に示された^{9,10)} (図10).

6. おわりに

Bak らのもともとの考え方は, (i) 散逸が強く安定状態がいくつもある要素が, (ii) 空間的に広がって分布して相互作用しているような系を, (iii) ゆっくりと駆動したときに, 臨界状態がかなり一般的に現われるはずだ, というものだ. そのような場合, 安定領域と不安定領域の境界に系が追い込まれて行くというのだ.*

そのような立場からは, 最後に挙げた保存則のない SPM でも, 冪乗則が現われても一向に差し支えないわけではある. しかしながら, s_i が“拡散する”たびに一部が散逸して行くのにもかかわらず, いくらでも大きな雪崩が生じうるとするのは, 直感的に理解しにくいことも事実だ.

* DLA (Diffusion Limited Aggregation) のようなものも, 上に述べたような範疇では SOC と言えないこともない.¹¹⁾

系の状態が何か非常に微妙なものに発展していつているように思える. このような系で本当に冪乗則がどこまでも成り立っているとしても, なぜそうなのか, まだ理解されていない.

ともかく, SPM の自己組織臨界現象は当初考えられていたよりも一般的な現象のようだ. 一体このような系はどのくらい一般的に SOC を示すのか, またそれらの間に共通したメカニズムが考えられるのかなど, まだまだ解明すべきことは多そうだ.

参考文献

- 1) 例えば, B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco, 1982. 高安秀樹: フラクタル (朝倉書店, 1986).
- 2) P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld: Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 381; Phys. Rev. A **38** (1988) 364. この有名な論文は, また, いくつかの誤りがあるということでも有名である. 最も深刻なものは, 砂山崩しのモデル (SPM) が $1/f$ ノイズを示すと主張している点であろう. $1/f$ ノイズのモデルとして考案されたこの SPM は, 今では $1/f^2$ ノイズを示すことが知られている. H.J. Jensen, K. Christensen and H.C. Fogedby: Phys. Rev. B **40** (1989) 7425. K. Christensen, H.C. Fogedby and H.J. Jensen: J. Stat. Phys. **63** (1991) 653. J. Kertész and L.B. Kiss: J. Phys. A **23** (1990) L433. ところが不思議なことに, 後で述べるこのモデルを拡張した非保存 SPM は $1/f$ ノイズを示すことが見いだされた. 参考文献 10 を参照のこと.
- 3) H.M. Jaeger, C-h. Liu and S.R. Nagel: Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 40. H.M. Jaeger and S.R. Nagel: Science **255** (1992) 1523. ある限られた範囲では冪乗則が見えるという報告もある. G.A. Held, D.H. Solina II, D.T. Keane, V.J. Haag, P.M. Horn and G. Grinstein: Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 1120. M. Bretz, J.B. Cunningham, P.L. Kurczynski and F. Nori: *ibid.* **69** (1992) 2431.
- 4) R. Burridge and L. Knopoff: Bull. Seismol. Soc. Am. **57** (1967) 341.
- 5) J. M. Carlson and J. S. Langer: Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2632; Phys. Rev. A **40** (1989) 6470. J.M. Carlson, J.S. Langer, B.E. Shaw and C. Tang: *ibid.* **44** (1991) 884.
- 6) B. Gutenberg and C.F. Richter: Ann. di Geofis. **9** (1956) 1.
- 7) H. Nakanishi: Phys. Rev. A **41** (1990) 7086, **43** (1991) 6613.
- 8) G. Grinstein, D.-H. Lee and S. Sachdev: Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1927. T. Hwa and M. Kardar: Phys. Rev. A **45** (1992) 7002.
- 9) Z. Olami, H.J.S. Feder and K. Christensen: Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 1244; Comment *ibid.* **71** (1993) 1288. K. Christensen and Z. Olami: Phys. Rev. A **46** (1992) 1829.
- 10) K. Christensen, Z. Olami and P. Bak: Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 2427. H.F. Chau and K.S. Cheng: Phys. Rev. A **46** (1992) R2981.
- 11) O. Pla and F. Guinea and E. Louis: Phys. Rev. A **42** (1990) 6270.