特殊相対性理論入門 講義ノート

中西 秀

2024 年 5 月 10 日

はじめに

これは、基幹物理学 II の前半に講義する特殊相対性理論の講義ノートです。講義の予習や復習をするために公開します。ただし、不完全かつ未完成なものなので、相対性理論の勉強のためには、適切な参考書を合わせて読まれることをおすすめします。

アインシュタインは 1905 年に 4 編の論文を出版しました。その全てがその後の物理学の発展に非常に大きな影響を与えたましたが、そのうち 2 編が特殊相対性理論に関する論文です:

- "Zur Elektrodynamik bewegter Körper"
  (On the electrodynamics of moving bodies),
  A. Einstein, Annalen der Physik **322** (1905) 891–921.
  DOI: 10.1002/andp.19053221004
- "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?"
  (Does the inertia of a body depend upon its energy-content?),
  A. Einstein, Annalen der Physik **323** (1905) 639–641.
  DOI: 10.1002/andp.19053231314
  日本語訳（中西　秀）

講義ではこれら 2 編の論文の内容を概説し、特に、**世界でもっとも有名な物理の公式**

$$\boldsymbol{E = Mc^2}$$

がどのようにして導き出されたかを理解することを目的とします[1]。

アインシュタインの論文はどちらもドイツ語でかかれていますが、英語や日本語にも訳されており、インターネットから容易に手に入ります。この講義のあと、アインシュタインの原著論文に挑戦してみてください！

[1] 公式 $E = Mc^2$ について、若干専門的ではあるが教育的な記事がアメリカ物理学会誌にある（Lev B. Okun, Physics Today, **42**, June, 31-36 (1989). "The concept of mass"）。

目 次

第1章　相対性原理

1.1　ガリレイの相対性原理

ガリレオ・ガリレイは「天文対話」で、「一定速度で動いている船の上でも石はまっすぐ下に落ちる」と述べた。これをより一般的に敷衍した、

力学法則は全ての慣性系において同じでなければならない

という主張は、**ガリレイの相対性原理 (Galilean principle of relativity)** と呼ばれている。ニュートン力学はこれを満たしている。まずこれを数学的に定式化してみよう。

1.1.1　ニュートンの運動方程式

原点が O の座標系 S において、時刻 t での点 P の座標を

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

とする。点 P の速度は、

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

加速度は

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

と表される。これらの表記を用いると、点 P にある質点のニュートンの運動方程式は

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \quad \text{あるいは} \quad m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

と表される[1]。これはまた、運動量 $\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v}$ を用いて

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{1.2}$$

と書くこともできる。

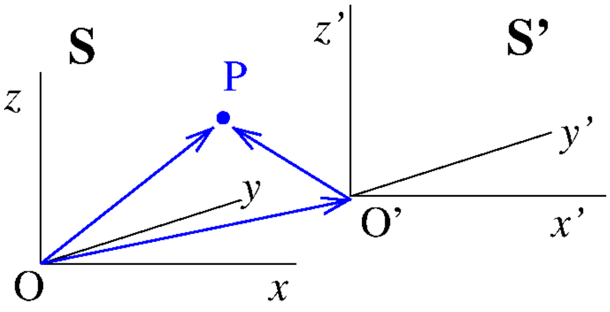


図 1.1: 2 つの座標系 S と S′.

1.1.2　座標変換

座標系 S とは別の、原点が O′ にある座標系 S′ を考える。2 つの座標系の座標軸は平行で、S 系における S′ 系の原点 O′ の位置ベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}} \equiv \boldsymbol{d} \equiv (d_x, d_y, d_z) \tag{1.3}$$

とする。点 P の S 系および S′ 系での座標をそれぞれ

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y, z), \quad \boldsymbol{r}' = \overrightarrow{\mathrm{O'P}} = (x', y', z')$$

とすると、それらには

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{d}$$

の関係がある。S′ 系における速度 $\boldsymbol{v}'$ および加速度 $\boldsymbol{a}'$ は、

$$\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}, \quad \boldsymbol{a}' = \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}$$

と表される。

1.1.3　ガリレイの相対性原理

さて、これだけ準備をしておいて、以下の問題を考える：

> S 系でニュートンの運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ が成り立つとき、
> S′ 系でも同じ形の運動方程式 $m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}$ が成り立つか?

ただし、時間 t、質量 m、および力 $\boldsymbol{F}$ は座標系によらないとする。

この問いに対する答えは、以下の条件の下に Yes である：S 系から見た S′ 系の原点 O′ の速度を

$$\boldsymbol{V} \equiv \frac{d\boldsymbol{d}}{dt}, \tag{1.4}$$

とすると、S′ 系における質点の速度 $\boldsymbol{v}'$ と加速度 $\boldsymbol{a}'$ は

$$\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V},$$
$$\boldsymbol{a}' = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{a} + \frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$$

[1]質量を m、働いている力を $\boldsymbol{F}$ とした。

で与えられる。故に、

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = 0 \tag{1.5}$$

であれば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$ となり

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

をえる。即ち、

> S 系から見て S′ 系の速度が一定、即ち等速直線運動をしている場合には、ニュートンの運動方程式は形を変えない、

即ち、

ニュートン力学はガリレイの相対性原理を満たす。 (1.6)

1.1.4　ガリレイ変換

式 (1.5) のとき $\boldsymbol{V}$ は時間によらない定ベクトルなので、式 (1.4) より

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{V}t + \boldsymbol{d}_0 \tag{1.7}$$

となる。但し、$\boldsymbol{d}_0$ は積分定数で、$t = 0$ での $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ である。特に、$\boldsymbol{d}_0 = 0$、即ち、$t = 0$ で 2 つの座標系の原点が一致するとき、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ の関係は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t, \quad \text{すなわち} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x' + V_x t \\ y & = & y' + V_y t \\ z & = & z' + V_z t \end{array} \right. \tag{1.8}$$

で与えられる。この式による $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{r}'$ への座標変換を**ガリレイ変換 (Galilean transformation)** という。これまでの議論をまとめると、(1.6) は

ニュートンの運動方程式はガリレイ変換に対して不変である

と表現できる。

1.2　電磁気の法則

ところが、電磁気の法則はこのガリレイの相対性原理を満たさない。これは、以下のような例を考えることによって容易に分かる。

1.2.1　ファラデーの法則とローレンツ力

静止したコイルに磁石を近づけると、ファラデーの法則に従って、コイルを貫く磁束 Φ の時間変化に比例した誘導起電力

$$V_I = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{1.9}$$

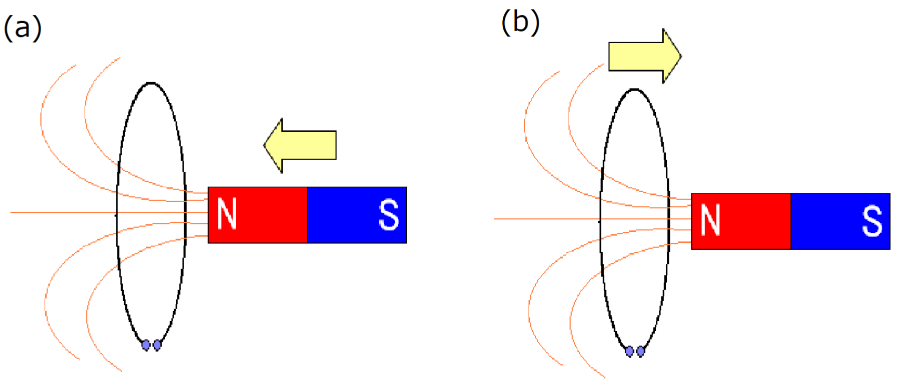


図 1.2: コイルと磁石の相互作用. (a) 磁石がコイルに近づく場合。(b) コイルが磁石に近づく場合

がコイルに生じる。これは、時間変化する磁場によって電場が誘起される現象で、マックスウェル方程式では

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \tag{1.10}$$

と表される。コイル中の電子は、この誘起された電場から力を受ける。

同じ現象を磁石とともに動く座標系から見てみよう。すると、コイルが動いて、止まっている磁石に近づく。その場合、コイルの中の電子は磁場中を運動しており、それに働く力は、磁場中を運動する荷電粒子に働くローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{1.11}$$

として記述される。

起こっていることは一つで電子に働く力は同じなのに、これら 2 つの座標系からの記述は別の法則に基づき、全く別の現象を記述しているかのようだ。それぞれの座標系でこの現象を記述する式 (1.10) と (1.11) は、単純にガリレイ変換 (1.8) で関連付けられない。これは、電磁気の法則を表す方程式が、力学の場合と違って、ガリレイ変換に対して不変でない、即ち

電磁気の法則はガリレイの相対性原理を満たさない

ことを示している。

問題 1.1 ストークスの定理を用いて、式 (1.10 から式 (1.9) を導け。

1.2.2 真空中の電磁波

電磁法則がガリレイ変換に対して不変でないことは、電磁波の伝播を考えることによっても示される。ある座標系 S で、真空中のマックスウェ

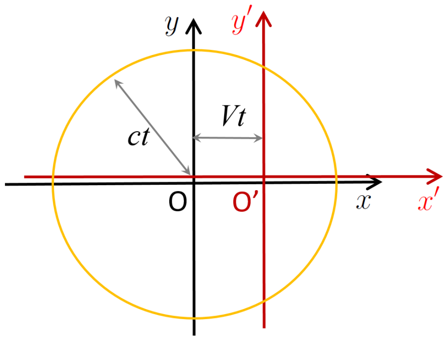


図 1.3: S 系で波動方程式 (1.12) および (1.13) が成り立てば、時刻 $t = 0$ に S 系の原点から発射した光は、時刻 t には S 系で原点 O を中心に半径 ct の球面上に達する。それを S′ 系で見るとどう見えるか？

ル方程式は、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{dt},$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{dt}$$

で与えられる[2]。第 2 式の両辺の rot をとり $\boldsymbol{B}$ を消去すると、波動方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}; \qquad c^2 \equiv \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \tag{1.12}$$

をえる。同様に第 4 式の rot をとり $\boldsymbol{E}$ を消去すると、

$$\nabla^2\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} \tag{1.13}$$

が得られる。これらは速さ c で伝わる波の解を持ち、その伝播速度 c が光の伝播速度に一致していることから、光が電磁波であることが分かった。

さて、この座標系で速さ c で伝播する光を、S 系に対して速度 V で等速直線運動している座標系 S' から見るとする。すると、前方へ伝播する光の速さは $c - V$、後方へは $c + V$ となるだろう。つまり、光の速さは電磁波の伝播速度は方向によって異なり、一定の値 c ではないのは明らかである。もし、S' 系でも波動方程式 (1.12) と同じ形の方程式が成り立てば、光の速度はどの向きにも c でなければならないので、明らかに矛盾している。すなわち、式 (1.12) を導いた**マックスウェル方程式はガリレイ変換 (1.8) に対して不変ではありえない。**

問題 1.2 真空中のマックスウェル方程式から、波動方程式 (1.12) および (1.13) を導け。ヒント：ベクトル解析の等式 $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$ を用いよ。

問題 1.3 波動方程式 (1.12) の平面波解を求め、その波の伝わる速さが c であることを示せ。また、平面波解の電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の関係を求めよ。更に、この電磁波が横波であることを示せ。

[2]真空中では電荷も電流も存在しないので、$\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$ である。

1.3　アインシュタインの特殊相対性原理

電磁法則がガリレイの相対性原理を満たさない事自体は、矛盾とは言えない。実際、アインシュタイン以前は、**エーテル (Ether)** という仮想的な媒質が真空中を埋め尽くしていると考えて、エーテルが静止しているような "絶対静止座標系" という特別な座標系があり、その座標系でのみマックスウェル方程式が成り立つという説も有力で、それに基づき地球がその座標系に対してどのくらいの速度で動いているのか測定する実験も行われた。

しかし、実験的証拠もないのにエーテルといった媒質を無理やり考えるのも不自然だし、力学の持っている相対性原理を電磁法則が満たしていないのは、自然法則に首尾一貫性がなく不完全な印象を与える。アインシュタインは、力学法則だけではなく電磁法則も含めて

$$\textbf{物理の基本法則は全ての慣性系で同じでなければならない} \tag{1.14}$$

と言う原理を要請すると、それまで受け入れられていた力学や電磁気学の法則にどのような修正が加えられるべきか検討した。真空中の光速は電磁気の法則から直接導き出されるので、上の原理から

$$\textbf{真空中の光の速さは全ての慣性系において同じ} \tag{1.15}$$

という、いわゆる**光速不変の原理 (Principle of constancy of speed of light)** が導き出される[3]。

元の (1.14) を**「特殊相対性原理」(Special principle of relativity)** という。アインシュタインの特殊相対性原理は、力学に対するガリレイの相対性原理を拡張して、電磁現象も含めたもので、光速不変の原理はこれから導き出される[4] 。

しかし、光速不変の原理は、直感的な速さの概念、即ち、直感的な時間や長さ（空間）の概念と矛盾することは明らかだ。そこでアインシュタインは、逆に光速度不変の原理を前提にして、長さや時間はどのように測られるべきかということを、注意深く検討することから始めた[5]。

1.3.1　物差しと時計

長さは物差し、時間は時計で測られる。座標系を指定したときに、その座標系において長さと時間はどう測られるべきか検討しよう。議論の出発点として、物差しも時計もいくつでも同じものを用意でき、与えら

[3]物質中の光速は、真空中の光速とは異なり、電磁気の基本法則だけからは導かれない。物質の誘電率や透磁率といった物質を性質を近似的に表すパラメタが必要である。

[4]光速不変の原理は特殊相対性原理から導かれるので、「原理」ではなく「法則」というべきものだ。ただ、以下で述べるように特殊相対性理論の多くの重要な結論が「光速不変の原理」から導かれるので、慣習として「光速不変の法則」ではなく「光速不変の原理」と呼ばれている。

[5]特殊相対性原理と特殊相対性理論は別のものであることに注意。「特殊相対性原理」は物理法則についての一般的主張で、「特殊相対性理論」はその原理に基づいて具体的に構成された力学および電磁気学の理論体系を指す。

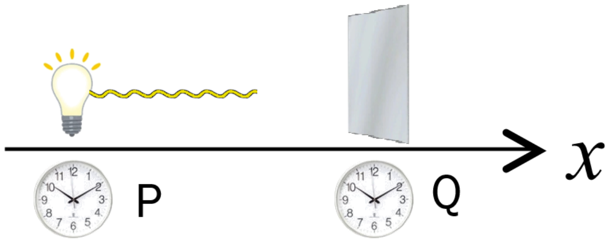


図 1.4: P と Q にある 2 つの時計を合わせるには光速が不変であることを用いれば良い。

れた座標系のあらゆる場所に物差しと時計が用意されているとする。更に、それらはその座標系で静止している限り、どこにあっても同様に働く、即ち物差しは同じ長さで、時計は同じ時間間隔で時を刻むとする。ある事象の起こった位置と時刻は、それを記述する座標系に固定された時計と物差しで測定する。

1.3.2 時計の同期

事象の起こった時刻を測定するための時計がいくつもあるとする。まず、座標系に固定された時計を全て同期させなければならないが、

離れた場所にある 2 つの時計が同期しているかどうか

どうすれば判定できるだろうか？

アインシュタインは以下のような思考実験を考えた。離れた 2 点 P と Q にそれぞれ時計 P と時計 Q があり、それらは同じ座標系に固定されている、即ち静止しているとする。点 P にある電球から光を発射して、点 Q にある鏡で反射させ、また点 P に光が戻ってきたとする。

最初に点 P から光を発射したときに時計 P が示す時刻を t_P
点 Q で反射したときの時計 Q の時刻を t_Q
その光が点 P に戻ってきたの時計 P の時刻を t'_P

とする。光速度は不変だから、行きと帰りにかかる時間も同じなので、時計 P と時計 Q の指す時刻がそれに矛盾しなければ、即ち、

$$t_Q - t_P = t'_P - t_Q \tag{1.16}$$

ならば、2 つの時計は互いに合っている（同期している）と判定できる。

問題 1.4 もし 2 つの時計のさす時刻が式 (1.16) を満たさないとき、時計 Q を時計 P に同期させるためには、時計 Q をどれだけ進めれば、或いは遅らせればよいか？ただし、$(t_Q - t_P) - (t'_P - t_Q) = \Delta t$ とせよ。

1.3.3 同時刻の相対性

ある座標系に固定された 2 つの時計を上のように同期させたとき、それらは別の座標系から見ても同期しているだろうか？光速がどの座標系で見ても同じであることを出発点にして、以下のような考察をしてみる。

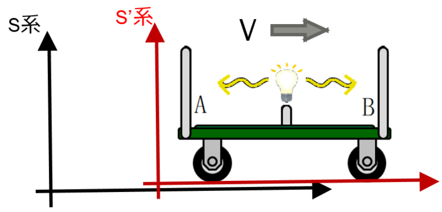


図 1.5: 同時刻の相対性：右に動く台車の中央から発射された光が左右の壁に到達する時刻は S 系で同時ではない。

S 系に対して、x 軸方向に速度 V で等速直線運動をしている台車を考え、台車とともに動く座標系を S′ 系とする（図 1.5）。台車の後端 A と先端 B の真ん中に光源があり、以下の実験をしたとする：

> **実験：**ある時刻に光源が光り、その光が左右に同じ距離進んで A と B に到達する。

これを、２つの座標系 S 系と S′ 系で観察するとどのように見えるであろうか。

まず、S′ 系で見てみよう。そこでは、台車は止まっている。光源から A および B までの距離をどちらも ℓ' とする。光速を c として、時刻 $t'=0$ で光源を出発した光が、A に到着する時刻 t'_A、B に到着する時刻 t'_B ともに

$$t'_A = t'_B = \frac{\ell'}{c}$$

となり、当然、光は同時刻に A と B に到着する。

これを S 系から見るとどうなるか？光源と A および B の距離は S 系では ℓ とする。光速不変の原理より S 系でも光は速度 c で伝播する。ところが、台車は速さ V で右方向へ進行しているので、S 系から見ると、光源からでた光と A が近づく速さは $c+V$、光と B が近づく速さは $c-V$ である。その結果、$t=0$ に発射された光が A および B に到達する時刻をそれぞれ t_A および t_B とすると

$$t_A = \frac{\ell}{c+V}\,, \qquad t_B = \frac{\ell}{c-V}$$

となり、同時刻ではない。つまり、光が A に到達したという事象と、B に到達したという事象は、S′ 系では同時刻だが、S 系では同時刻ではないことになる。

このように、光速不変の原理を認めると、

> 空間的に離れた場所で起こった 2 つの事象が同時刻かどうかは、座標系、即ち観測者の運動状態に依存する

ことが分かる。これを**同時刻の相対性 (Relativity of simultaneity)** という。

問題 1.5 この例を用いて、S′ 系で同期している A と B にある 2 つの時計が、S 系では同期していないことを説明せよ。 **ヒント：**「A と B にある時計が同時刻を指すときに、S 系での時刻は同じでない」、或いは「S 系で同時刻の時に A と B にある時計が同じ時刻を指していない」ことを説明すればよい。

1.3.4　動いている棒の長さ

静止している棒 AB の長さは、棒の両端の点 A と点 B の間の距離である。では、動いている棒の長さはどう定義すればよいだろうか？同様に、

ある時刻における棒の両端 A と B の距離

と定義する以外にないが、両端 A と B は離れており、前節で見たように同時刻の概念が相対的なので、棒が動いている座標系での棒の長さが、棒が静止している座標系の長さと同じになると期待する理由は無い。動いている棒の長さは、止まっているときと比べて、どのように異なるであろうか？

前節と同様に 2 つの座標系、S 系と S′ 系を考える。S′ 系は S 系に対して x 軸方向に速度 V で運動しており、S 系および S′ 系の原点 O と O′ は、時刻 $t = t' = 0$ に一致していたとする。

棒 AB は S′ 系で静止しており、x' 軸に沿ってその真ん中が原点 O′ に一致するように置かれているとする。S 系での棒の長さを 2ℓ、S′ 系での棒の長さを $2\ell'$ とする。つまり、静止している時の長さが $2\ell'$ の棒が、速度 V で動くと長さが 2ℓ になるとする。

この $2\ell'$ と 2ℓ の関係を考える為に、今逆に、速さ V で動いているときの長さが $2\ell'$ となる棒の、静止状態での長さ a はいくらかを考えよう（表 1.1）。それは、以下のような考察から求められる。

S′ 系の x' 軸に固定された長さ $2\ell'$ の棒の両端 A と B が、S′ 系で見て同時刻に通過する、S 系の x 軸上の点 P と Q の座標の差（距離）を a とする。すると、静止状態でこの a の長さの棒が、速さ V で動くと長さが $2\ell'$ となることが分かる。

問題 1.6　このことを説明せよ。
〔ヒント〕 両端が PQ の棒が S 系に固定されていたとする。それを S′ 系から見ると、速度 $-V$ で動いており、A と P が一致する瞬間と B と Q が一致する瞬間は同時刻（図 1.6 参照）。

この仮想的な棒の長さ a は以下のように求められる。まず、S′ 系の x 軸に固S定された棒 AB の中点 O′ に光源があるとする。$t = t' = 0$ に $\mathrm{O} = \mathrm{O}'$ で光源が光ったとして、その光が A および B に到達した時の、A および B の S 系での位置をそれぞれ P および Q とする。光が A および B に到達する時刻は S 系では

$$t_A = \frac{\ell}{c+V}, \qquad t_B = \frac{\ell}{c-V}$$

	静止状態	速さ V
棒 AB（S′ 系に固定）	**S′ 系で長さ $2\ell'$**	S 系で長さ 2ℓ
棒 PQ（S 系に固定）	S 系で長さ a	**S′ 系で長さ $2\ell'$**

表 1.1: S′ 系に固定され静止状態の長さが $2\ell'$ の棒 AB と、S 系に固定され速さ V の時の長さが $2\ell'$ の棒 PQ。

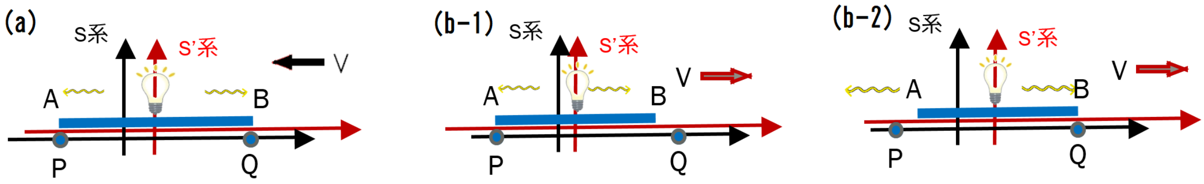


図 1.6: (a) S′ 系から見て、棒 AB の中心から左右に発射された光は、棒の両端 A と B に同時に到達する。その時、S 系に固定された点 P と Q は、それぞれ棒の端 A と B に一致している。(b-1) 同じ事象を S 系から見ると、光は棒の左端 A に先に到着する。その時、点 P は A に一致している。光はまだ棒の右端 B には到達していない。(b-2) S 系から見て光が棒の右端 B 点についた瞬間。点 Q は B に一致している。その時、光は棒の左端 A を通り過ぎ、棒の左端 A は点 P を既に通り過ぎている。

なので、

$$\overline{\mathrm{OP}} = c\,t_A\,, \qquad \overline{\mathrm{OQ}} = c\,t_B$$

で与えられ、$\overline{\mathrm{PQ}} = a$ は

$$a = \overline{\mathrm{OP}} + \overline{\mathrm{OQ}} = c\,(t_A + t_B) = 2\ell\,\frac{c^2}{c^2 - V^2} \tag{1.17}$$

と求められる。

さて、速さ V で動いている棒の長さは、動く向きに関わらず、静止しているときの棒の長さに因子 k を掛けたものになるとする。すると、S′ 系で静止している棒の S 系での長さは

$$2\ell = k\;2\ell'$$

と表される。また、速度 V で動いているときの長さが $2\ell'$ になる棒の静止時の長さが a であることから、

$$2\ell' = k\;a$$

となる。これらに式 (1.17) で求めた a を用いて

$$k = \sqrt{1 - (V/c)^2}\ < 1 \tag{1.18}$$

を得る。即ち、動いている棒は運動の方向にこの因子 k だけ縮む：

$$\ell = \ell'\sqrt{1 - (V/c)^2}. \tag{1.19}$$

これを**ローレンツ収縮 (Lorentz contraction)** という。

1.3.5　時計の遅れ

前節と同様の 2 つの座標系 S と S′ を考える。S′ 系とともに運動する台車の左端にある光源から出た光が、その右端に置かれた鏡に反射して、元の光源の位置に戻るという一連の事象を、2 つの座標系で記述する（図

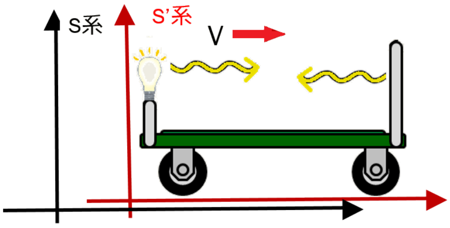


図 1.7: 動く台車の左端から発射された光が右端の鏡で反射してもとに戻るまでの時間

1.7)。光源と鏡は S′ 系で静止しており、その間の距離は S 系と S′ 系でそれぞれ ℓ と ℓ' とする。

S′ 系では、光源が光って、その光が光源まで戻ってくる時間 $\Delta t'$ は

$$\Delta t' = \frac{2\ell'}{c}$$

となる。一方、S 系では

$$\Delta t = \frac{\ell}{c-V} + \frac{\ell}{c+V} = 2\frac{\ell}{c}\frac{1}{1-(V/c)^2}$$

となる。ℓ と ℓ' の関係はローレンツ収縮 (1.19) で与えられるので、

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{\ell}{\ell'}\frac{1}{1-(V/c)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} > 1 \tag{1.20}$$

を得る。即ち、同じ事象を見ても、ともに動いている座標系で見るよりも、止まっている座標系で見た方が時間が長くかかる。つまり、動いている時計はゆっくりに見える。これを時計の遅れという。

問題 1.7 x 軸方向に一定速度 V で移動している y 軸に平行に置かれた棒の長さは、S 系と S′ 系で変わらない。このことと、光が y' 軸に平行な経路を往復するのにかかる時間から、時計の遅れ (1.20) を導け。

問題 1.8 式 (1.18) で与えられるローレンツ収縮の因子 k を、人の歩く速さ、新幹線、人工衛星、地球の自転あるいは公転速度などの速さ V について計算してみよ。また、k =0.99, 0.9, 0.5, 0.1 になる速さ V を求めよ。

1.4 付録：なぜ光速は特別なのか?

なぜ光だけが特別なのか疑問に思うかもしれない。例えば、空気中の音波は、空気の密度場 $n(\boldsymbol{r}, t)$ に対して、式 (1.12) と同様の波動方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^2 n = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} \tag{1.21}$$

を満たし、速さ v で伝わる。この v は音速で通常 300 m/s 程度である。

光速が不変なのに、どうして音速は不変ではないのか？ (1.22)

と思う人も多いだろう。これに対する一番単純な答えは、

> 特殊相対性原理は物理の基本法則に対する原理だが、音波の式 (1.21) は物理の基本法則では無い。

それ故、特殊相対性原理からは音速が不変になる理由は無い。

音波の実体は空気分子の集団運動で、音波の式 (1.21) は空気分子の密度 n を用いてその集団運動を記述する方程式である。個々の分子の運動を記述する力学法則は基本法則なので特殊相対性原理を満たすべきだが、音波の式 (1.21) は分子の平均速度がゼロとなる仮定の下に近似的に導かれる。即ち、空気分子が全体として止まっている座標系（風が吹かない座標系）でのみ成り立つ、分子密度 n に対する方程式だ。空気に対して運動している座標系では式 (1.21) は形を変える。

それに対して、電場に対する波動方程式 (1.12) は、真空中のマックスウェル方程式から直接導出され、座標系に対する仮定は無い。既に述べたように、相対性理論以前は、電磁波も真空を伝わるのではなく音波のように何か媒質の集団運動とする考え方もあり、その仮想的媒質をエーテルと呼んだ。マックスウェル方程式はエーテルが静止している座標系のみで成り立つものと考えて、エーテルの風を実験的に見つけようとする試みもあった。しかし、エーテルの風は見つからなかった。それに対して、電磁波は何もない真空を伝わるとして矛盾のない理論を構成できることを示したのがアインシュタインの特殊相対性理論だ。

(1.22) の疑問に対する答えは、

> 真空中の電磁波（光）はマックスウェル方程式から直接導出されるため、**光の波動方程式 (1.12) が成り立つ座標系に対する制限が見出せない。**それに対して、音波は気体分子からなる媒質の振動で、**音波の式 (1.21) は媒質が静止している座標系のみで成り立つ**ことが、その導出過程から分かる。

である。この議論からわかるように、光速であっても、ガラスや水などの媒質中を伝播する光速は不変ではない。媒質中のマックスウェル方程式には、媒質の誘電率や透磁率など、媒質の性質を表すパラメタが現れるが、それらを含む式は、考えている座標系に対して媒質が静止している場合にのみ成り立つ。

第2章　ローレンツ変換

前章で、光速不変の原理を受け入れると、動いているものの長さや時間の進み方が、止まっているときとは異なることが導かれることを示した。これは、光速を不変とするためには、時間と空間が互いに関連せざるを得ないからある。つまり、ガリレイ変換では当然のこととしていた「座標系が異なっても時間は同じ」という仮定が成り立たないのである。そこで、座標系に時間を含めた時空座標 (t, x, y, z) を考え、ガリレイ変換に代わる変換規則を導こう。その際の拠り所は光速不変の原理である。

2.1　座標変換

一定速度で動いている観測者と静止している観測者が、同じ事象をそれぞれいつ何処で起こったものとして観測するかは、2つの座標系 S と S′ に於ける時空座標 (t, x, y, z) と (t', x', y', z') の間の関係式で定式化できる。

S 系と S′ 系の座標軸は互いに平行で、S′ 系は S 系の x 軸方向に速度 V で平行移動しており、S 系から見て S′ 系の原点 O′ は時刻 $t = 0$ で O に一致していたとする。逆に S′ 系から見て、S 系の原点 O が O′ に一致していた時刻を $t' = 0$ としよう。すると、S 系における O′ の座標は $(Vt, 0, 0)$ で与えられ、逆に、S′ 系における O の座標は $(-Vt', 0, 0)$ となる。ある事象が起こった時刻と位置を、この 2 つの座標系で記述したとする。S 系での時空座標 (t, x, y, z) と、S′ 系での時空座標 (t', x', y', z') の間の対応を**座標変換**という。

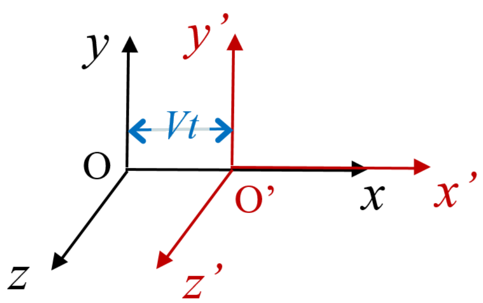


図 2.1: 2 つの座標系 S と S′.

2.1.1 ガリレイ変換

S 系に対して S′ 系が速度 $\boldsymbol{V} = (V, 0, 0)$ で移動しているとき、ガリレイ変換 (1.8) は

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.1}$$

で与えられる。時刻については 1.1.4 節では議論しなかったが、座標系によらず同じ、即ち $t' = t$, ということは、相対性理論以前は暗黙に仮定されていた。この変換を用いて、(t, x, y, z) でかかれたニュートンの運動方程式を (t', x', y', z') で書き直しても、形は変わらない。ところがマックスウェルの方程式は同じにならず、その結果、光速は座標系によって異なる。

2.1.2 ローレンツ変換

そこで、光速が不変になるような座標変換を考えると、どうなるだろうか? 問題を簡単にするため、速度 $\boldsymbol{V}$ に平行な x 軸だけを考えて、

$$\text{S 系：}\ (t, x) \qquad \leftrightarrow \qquad \text{S}' \text{ 系：}\ (t', x') \tag{2.2}$$

の関係を考察する。

時空の一様性　まず、座標の原点をどこにとっても (t, x) と (t', x') の関係は（定数項を除いて）同じになるべきであろう。すると、両者の関係は線形（一次関数）でなければならず、定数係数 α, β, γ, δ を用いて

$$\begin{aligned} t' &= \alpha t + \beta x \\ x' &= \gamma x + \delta t \end{aligned} \tag{2.3}$$

と表される。ただし、$(t, x) = (0, 0)$ と $(t', x') = (0, 0)$ が対応するとして、定数項はゼロとした。以下で係数 α, β, γ, δ を求める。

O′ **点の座標**　S′ 系の原点 O′ は、当然 S′ 系で見れば時刻 t' によらずいつも $x' = 0$ で、S 系で見れば時刻 t で $x = Vt$ である。つまり、２つの座標系での対応関係 (2.2) は

$$\text{S 系：}\ (t, Vt) \qquad \leftrightarrow \qquad \text{S}' \text{ 系：}\ (t', 0)$$

となるので、この対応関係 $x = Vt$, $x' = 0$ を変換式 (2.3) に代入すると

$$\begin{aligned} t' &= \alpha t + \beta V t \\ 0 &= \gamma V t + \delta t \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる。任意の t に対してこれらの式が矛盾しないためには

$$\delta = -\gamma V \tag{2.5}$$

でなければならない。

O 点の座標　次に S 系の原点 O の両座標系での座標を考える。これは、同様の考察により

$$\text{S 系：}\ (t,0) \qquad \leftrightarrow \qquad \text{S}'\text{ 系：}\ (t',-Vt')$$

となるので、変換式 (2.3) は

$$\begin{aligned} t' &= \alpha t \\ -Vt' &= \delta t \end{aligned} \tag{2.6}$$

を満たさなければいけない。これと式 (2.5) から

$$\alpha = -\frac{\delta}{V} = \gamma \tag{2.7}$$

を得る。式 (2.5) と (2.7) を用いると、変換式 (2.3) は

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t + \beta x \\ x' &= \gamma(x - Vt) \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。

ここまでは光速不変の原理とは関係のない議論で、ガリレイ変換でも成り立っている。実際、式 (2.8) で相対論以前には当然とされた関係 $t' = t$ が成り立つとすると、$\gamma = 1$, $\beta = 0$ となり、式 (2.8) はガリレイ変換 (2.1) を与える。

光速不変　さて、この座標変換に光速不変の原理を要請しよう。即ち、S 系で $t = 0$, $x = 0$ で発射された光の位置は (t, ct) で表される。これを S′ 系で見ると、光は $t' = 0$ に $x' = 0$ から発射され (t', ct') に達する。即ち、変換式 (2.8) に $x = ct$, $x' = ct'$ を代入すると、任意の t に対して

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t + \beta ct &&= (\gamma + \beta c)t \\ ct' &= \gamma(ct - Vt) &&= \gamma(c - V)t \end{aligned} \tag{2.9}$$

が成り立たなければならない。この 2 つの式が両立すべき条件から

$$\beta = -\frac{V}{c^2}\gamma \tag{2.10}$$

をえる。即ち、変換式 (2.3) は

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma(x - Vt) \end{aligned} \tag{2.11}$$

となった。

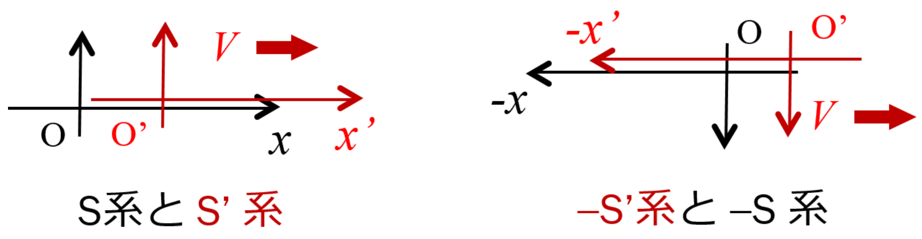


図 2.2: 空間反転対称性

空間反転対称性　最後に残った係数 γ は、以下のように空間の反転対称性を仮定することによって決められる。即ち、S′ 系から見ると、S 系は速度 $-V$ で移動しているので、S 系と S′ 系の x 軸をそれぞれ反転させた座標系を $-$S 系および $-$S′ 系を考える：

$$-\text{S 系: } (t,-x), \qquad -\text{S}' \text{ 系: } (t',-x'). \tag{2.12}$$

$-$S′ 系から見て $-$S 系は $-x'$ 軸方向に V で移動しているので、$(t,-x)$ と $(t',-x')$ の関係は (t',x') と (t,x) との関係 (2.11) と同じになるはずだ：

$$\begin{aligned} t &= \gamma\left(t' - \frac{V}{c^2}(-x')\right) \\ (-x) &= \gamma\Big((-x') - Vt'\Big). \end{aligned} \tag{2.13}$$

この空間反転対称性を仮定すれば、式 (2.13) を (t',x') について解いたもの

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\gamma(1-V^2/c^2)}\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ x' &= \frac{1}{\gamma(1-V^2/c^2)}\Big(x - Vt\Big) \end{aligned} \tag{2.14}$$

は、式 (2.11) に一致しなければならないので、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{2.15}$$

を得る。但し、$V=0$ のときに $\gamma=1$ となるよう平方根の符号を選んだ。

これまでの議論は x と t だけについて行ったが、(t,x,y,z) すべてを含めて同様の議論をすると、

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\Big(x - Vt\Big), \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.16}$$

が得られる（2.6 節 参照)。これを、逆に解くと

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \\ x &= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\Big(x' + Vt'\Big) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{2.17}$$

となる。これらの座標変換を**ローレンツ変換**という。

問題 2.1 もし、座標変換 (2.3) に x や t の 3 次の項が含まれたとすると、S 系における長さ Δx や時間 Δt に対する S$'$ 系での長さ $\Delta x'$ や時間 Δt が、場所や時刻によって異なること、即ち一様でないことを示せ。

問題 2.2 式 (2.15) で $V=0$ のときに $\gamma=1$ となるように平方根の符号を選んだ理由を説明せよ。〔**ヒント**〕$\gamma=-1$ とすると何が不都合か？

問題 2.3 式 (2.11) を (x,t) について解いた式と、式 (2.11) で $(x,t) \leftrightarrow (x',t')$ の入れ換を行った式と比較して、γ を求めよ。
〔**注**〕 γ は V の偶関数と<u>仮定</u>せよ。

問題 2.4 式 (2.16) から式 (2.17) を導け。また、両者を比較してそれらの関係を議論せよ。

問題 2.5 $V/c \ll 1$ としてこれを無視すると、ローレンツ変換 (2.16) はガリレイ変換 (2.1) になることを示せ。

問題 2.6 (t,x,y,z) すべて含めて、ローレンツ変換 (2.16) を導け。

2.1.3 光速不変

S 系に於いて、時空点 (t_1,x_1,y_1,z_1) で発射された光が、時空点 (t_2,x_2,y_2,z_2) に到達したとする。それを S$'$ 系で記述すると、光は時空点 (t_1',x_1',y_1',z_1') で発射され、時空点 (t_2',x_2',y_2',z_2') に到達したとする。光速はどちらの座標系で見ても c なので、

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=c^2(t_1-t_2)^2 \tag{2.18}$$

$$(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2=c^2(t_1'-t_2')^2 \tag{2.19}$$

を満たさなければならない。即ち、2 つの時空点間の座標の差 $(\Delta t,\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ が、関係式

$$-(c\Delta t)^2+\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2=0 \tag{2.20}$$

を満たせば、それをどの座標系で記述しても同様の関係を満たさなければならない。

問題 2.7 ローレンツ変換 (2.16) を用いて、式 (2.18) から式 (2.19) を導け。

2.1.4 真空中のマックスウェル方程式の変換

ローレンツ変換は、もともとマックスウェル方程式を不変にする変換としてローレンツによって導入されていた。即ち、真空中のマックスウェルの方程式

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{E} &= 0, & \mathrm{rot}\boldsymbol{B} &= \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{dt}, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} &= 0, & \mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{dt} \end{aligned} \tag{2.21}$$

は、S 系および S′ 系での電場および磁束密度を

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{E}'(t',\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{B}'(t',\boldsymbol{r}') \tag{2.22}$$

として、ローレンツ変換 (2.16) および

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, & B'_y &= \frac{B_y + (V/c^2)\,E_z}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \\ E'_z &= \frac{E_z + VB_y}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, & B'_z &= \frac{B_z - (V/c^2)\,E_y}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

に対して、形を変えないことを示すことができる。但し、$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

問題 2.8 このことを確かめよ。

問題 2.9 式 (2.23) を逆に解いて、$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{E}'$ および $\boldsymbol{B}'$ で表した式を求めよ。

問題 2.10 S 系での電場と磁場が $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{B} = (0, B, 0)$ で与えられるとき、S′ 系での電場 $\boldsymbol{E}'$ と磁場 $\boldsymbol{B}'$ を求めよ。これを用いて、S 系で速度 $\boldsymbol{V} = (V, 0, 0)$ で運動する電荷が受ける力を S 系および S′ 系で記述せよ。これから、1.2.1 節で議論したファラデーの法則とローレンツ力の関係を考察せよ。

2.2 ミンコフスキー空間

ローレンツ変換 (2.16) は t と (x, y, z) を混ぜて変換するので、時間と空間を合わせた 4 次元の時空間、いわゆる**ミンコフスキー空間**を考えるのが便利だ。即ち、ミンコフスキー空間の 1 点 (t, x, y, z) は、時刻 t に場所 (x, y, z) で起こった事象の座標を表す。

時間の単位を空間と揃えるために、t の代わりに光速 c をかけて長さの

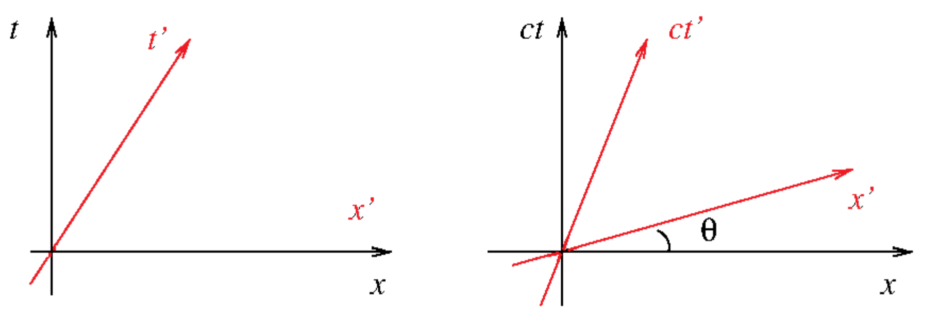


図 2.3: ガリレイ変換に従う古典的時空と（左）とローレンツ変換に従うミンコフスキー空間（右）

単位を持った ct を用いると、ローレンツ変換は

$$
\begin{aligned}
ct' &= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(ct - \frac{V}{c}\,x\right) \\
x' &= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(x - \frac{V}{c}\,ct\right) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

と、時間と空間に対して対称な形で表される。

$x - ct$ 平面に、$ct' = 0$ で与えられる x' 軸、

$$ct = \frac{V}{c}\,x$$

および、$x' = 0$ で与えられる ct' 軸

$$ct = \frac{c}{V}\,x$$

を引くと、$\tan\theta = V/c$ で与えられる角度 θ だけ傾いた斜交座標になる (図 2.3)。

ミンコフスキー空間において "距離" s を

$$s^2 \equiv -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{2.25}$$

と定義する。すると、これはローレンツ変換 (2.24) で変わらない[1]。

問題 2.11 距離 (2.25) がローレンツ変換 (2.24) で変わらないことを示せ。

2.2.1 棒の縮み

S′ 系に固定されている棒の、S′ 系での長さ ℓ' と S 系での長さ ℓ との関係を、ローレンツ変換 (2.24) を用いて求めよう。S′ 系での棒の両端 A と B の座標を x'_A および x'_B とする。すると、x'_A と x'_B は時間に依らず、ま

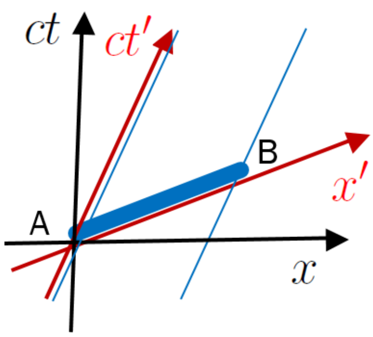


図 2.4: S′ 系に固定された棒の軌跡。

[1]光速不変を表す式 (2.20) は $s = 0$ の場合である。

た $x'_B - x'_A = \ell'$ である。一方、S 系での A および B の座標 x_A および x_B は、ローレンツ変換 (2.24) の第 2 式の左辺に x'_A および x'_B を代入した式

$$x'_A = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(x_A - \frac{V}{c}ct\right)$$
$$x'_B = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(x_B - \frac{V}{c}ct\right)$$

によって、時間 t の関数として与えられる。S 系での棒の長さ ℓ は、ある時刻 t での両端 A と B の距離 $x_B - x_A$ で与えられるので、両辺の差をとって

$$\ell' = x'_B - x'_A = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}(x_B - x_A) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,\ell$$

をえる。これは以前の結果 (1.19) と一致する。

2.2.2　時計の遅れ

S′ 系の原点 O′ にある時計の時刻 $(ct', 0)$ は、S 系では $(ct, x = Vt)$ にある時計の時刻に対応する。ローレンツ変換 (2.24) の第 1 式右辺に $x = Vt$ を代入した式

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(ct - \frac{V^2}{c^2}\,ct\right) = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,ct$$

より

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,t'$$

となり、やはり以前の結果 (1.20) を同じものを得る。

2.3　速度の合成

S′ 系で x' 軸方向に速度 u' で動いている点を S 系で見たときの速度 u はいくらになるであろうか? ガリレイ変換では当然

$$u = V + u' \tag{2.26}$$

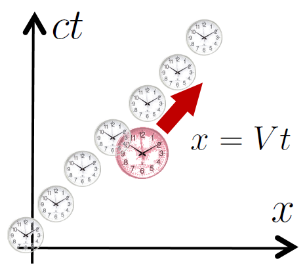


図 2.5: S′ 系に固定された時計（赤）と、それと同じ位置にある S 系に固定された時計達（黒）。

であった。しかしこれでは、明かに光速不変の原理は成り立たない。

ある点の座標がそれぞれの座標系で $x(t)$ および $x'(t')$ と、時間の関数として与えられているとする。それぞれの座標系におけるその点の速度は

$$u = \frac{dx(t)}{dt}, \qquad u' = \frac{dx'(t')}{dt'} \tag{2.27}$$

と表される。u と u' の関係をローレンツ変換を用いて求めよう。

ローレンツ変換 (2.16) の第 1 式の両辺を t で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\left(1 - \frac{V}{c^2}\,u\right) \end{aligned} \tag{2.28}$$

をえる。これを用いると、ローレンツ変換 (2.16) の第 2 式から、

$$\begin{aligned} u' = \frac{dx'}{dt'} &= \frac{d}{dt'}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\Big(x(t) - Vt\Big)\right] \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\Big(x(t) - Vt\Big)\right]\,\frac{dt}{dt'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\left(\frac{dx}{dt} - V\right)\frac{dt}{dt'} \quad = \frac{u - V}{1 - Vu/c^2} \end{aligned} \tag{2.29}$$

を得る。これを u について解くと、速度の合成則

$$u = \frac{V + u'}{1 + Vu'/c^2} \tag{2.30}$$

を得る。この式に $u' = c$ を代入すると $u = c$ を得て、確かに光速 c がどちらの系でも同じになることが確かめられる。

問題 2.12 式 (2.30) において、$|V|$ も $|u'|$ も c より小さい時には、いつも $|u| < c$ となることを示せ。

問題 2.13 式 (2.30) は、式 (2.29) で $u \leftrightarrow u'$, $V \leftrightarrow -V$ の置き換えたものになっている。この意味を説明せよ。

問題 2.14 ローレンツ変換 (2.16) を用いて、一般の方向の速度の合成則

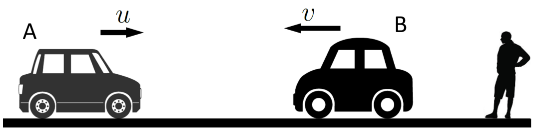
$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2} \\ u'_y &= \frac{u_y}{1 - Vu_x/c^2}\sqrt{1-(V/c)^2} \\ u'_z &= \frac{u_z}{1 - Vu_x/c^2}\sqrt{1-(V/c)^2} \end{aligned}$$

を導け。〔ヒント〕 $\boldsymbol{r} = (x, y, x)$ および $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ として、

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \qquad \boldsymbol{u}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$$

を用いよ。

問題 2.15 図のように、車Aが右向きに速さ u で、車Bが左向きに速さ v で進んでいるとする。



1. 道に立っている人にとって、車Aと車Bが近づく速さはいくらか？
2. 車Aに乗っている人にとって、車Bが近づく速さはいくらか？
3. 車Bに乗っている人にとって、車Aが近づく速さはいくらか？

2.4　加速度の変換

x 軸方向に運動している加速度の変換則も、速度と同様に求めることができる。S系およびS$'$系での加速度は、それぞれ、

$$a = \frac{du}{dt}, \qquad a' = \frac{du'}{dt'} \tag{2.31}$$

で与えられるので、式 (2.29) の両辺を t' で微分して、加速度の変換式

$$\begin{aligned} a' &= \frac{d}{dt'}\left(\frac{u-V}{1-uV/c^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{u-V}{1-uV/c^2}\right)\left(\frac{dt}{dt'}\right) \\ &= \left[\frac{du/dt}{1-uV/c^2} - \frac{u-V}{(1-uV/c^2)^2}\left(-\frac{V}{c}\frac{du}{dt}\right)\right]\frac{\sqrt{1-(V/c)^2}}{1-uV/c^2} \\ &= a\left[\frac{1-(V/c)^2}{\left(1-uV/c^2\right)^2}\right]^{3/2} \end{aligned} \tag{2.32}$$

をえる。この式は、速度の合成則 (2.29) より導かれる関係式、

$$\frac{1-(u'/c)^2}{1-(u/c)^2} = \frac{1-(V/c)^2}{\left(1-uV/c^2\right)^2} \tag{2.33}$$

を用いると、両辺が対称な形

$$\frac{a'}{\sqrt{1-(u'/c)^2}^{\,3}} = \frac{a}{\sqrt{1-(u/c)^2}^{\,3}} \tag{2.34}$$

に表される。

問題 2.16 式 (2.33) および式 (2.34) を導出せよ。

2.5　光のドップラー効果

ローレンツ変換を用いて、光の振動数の変換公式を導こう。S系で電場または磁場の振幅 $\boldsymbol{A}$, 角振動数 ω, 波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の電磁波を考える：

$$\boldsymbol{A}\sin\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right). \tag{2.35}$$

これがS$'$系では振幅 $\boldsymbol{A}'$, 角振動数 ω', 波数ベクトル $\boldsymbol{k}'$ であったとする：

$$\boldsymbol{A}'\sin\left(\omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z'\right). \tag{2.36}$$

両座標系の時空座標 $(t, \boldsymbol{r})$ はローレンツ変換 (2.16) で関係づけられており、波の位相はどの座標系で記述しても同じであるべきことから

$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z' \tag{2.37}$$

がなりたつ。これが任意の時空点で成り立たなければならないことから、$(\omega, \boldsymbol{k})$ と $(\omega', \boldsymbol{k}')$ の関係が求められる:

$$\omega' = \frac{\omega - V k_x}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{2.38}$$

$$k'_x = \frac{k_x - V\omega/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z. \tag{2.39}$$

波の伝播方向が、S 系で x 軸と成す角度を θ、S′ 系で x' 軸と成す角度を θ' とすると、

$$k_x = \frac{\omega}{c}\cos\theta, \qquad k'_x = \frac{\omega'}{c}\cos\theta' \tag{2.40}$$

なので、これを用いると式 (2.38) は

$$\omega' = \frac{1-(V/c)\cos\theta}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,\omega$$

と表される。速度 V で x 軸方向に移動している振動数 ν_0 の光源が放射する光を、S 系で観測したときの振動数 ν は、この式に $\omega' = 2\pi\nu_0$, $\omega = 2\pi\nu$ を代入して

$$\nu = \nu_0\,\frac{\sqrt{1-(V/c)^2}}{1-(V/c)\cos\theta} \tag{2.41}$$

と得られる。この場合 θ は、S 系における光源の進行方向と光の伝播方向の間の角度、即ち、光源から観測者に至るベクトルとのなす角度である。**光のドップラー効果**は式 (2.41) によって与えられる。

問題 2.17 式 (2.37) が任意の $(t, \boldsymbol{r})$ に対して成り立たなければならないことから、角振動数と波数ベクトルの変換公式 (2.38) と (2.39) を導け。

問題 2.18 式 (2.35) で表される波の伝播速度が光速 c の時、式 (2.36) で表される波も光速 c で伝播することを示せ。

問題 2.19 $V \ll c$ として $(V/c)^2$ を無視すると、式 (2.41) は音のドップラー効果と同様の式になることを確かめよ。

2.6 付録：ローレンツ変換の導出

全ての時空座標 (t, x, y, z) を含めた場合の、ローレンツ変換 (2.16) の導出を示す。まず、時空の一様性を仮定して、(t, x, y, z) と (t', x', y', z') の変換は線形とする：

$$\left\{\begin{array}{lcl} t' &=& \alpha_{00}\,t + \alpha_{01}\,x + \alpha_{02}\,y + \alpha_{03}\,z \\ x' &=& \alpha_{10}\,t + \alpha_{11}\,x + \alpha_{12}\,y + \alpha_{13}\,z \\ y' &=& \alpha_{20}\,t + \alpha_{21}\,x + \alpha_{22}\,y + \alpha_{23}\,z \\ z' &=& \alpha_{30}\,t + \alpha_{31}\,x + \alpha_{32}\,y + \alpha_{33}\,z. \end{array}\right. \tag{2.42}$$

ここで、α_{ij} は V に依存する定数である。これが、(i) 座標系間の関係、(ii) 光速不変の条件、および (iii) 空間反転対称性を満たすべきことから、ローレンツ変換 (2.16) が得られる。

2.6.1 座標系間の関係

2 つの座標系の関係は、それぞれの原点 O および O' が 2 つの座標系でどう記述されるかということから定まる。

まず、2.1.2 節と同様に、S' 系の原点 O' の時空座標は S 系および S' 系で

$$(t, Vt, 0, 0) \qquad \leftrightarrow \qquad (t', 0, 0, 0)$$

と記述される。それらが式 (2.42) を満たさなければならないから、

$$\alpha_{10} = -\alpha_{11} V, \quad \alpha_{20} = -\alpha_{21} V, \quad \alpha_{30} = -\alpha_{31} V \tag{2.43}$$

が得られる。同様に、S 系の原点 O' の時空座標が S 系および S' 系で

$$(t, 0, 0, 0) \qquad \leftrightarrow \qquad (t', -Vt', 0, 0)$$

となることから、

$$\alpha_{00} = \alpha_{11}, \quad \alpha_{21} = \alpha_{31} = 0 \tag{2.44}$$

をえる。これらの結果より、式 (2.42) は

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t' &=& \alpha_{00}\, t \ + \ \alpha_{01}\, x \ + \ \alpha_{02}\, y + \alpha_{03}\, z \\ x' &=& \alpha_{00}\big(-Vt + x\big) + \alpha_{12}\, y + \alpha_{13}\, z \\ y' &=& \alpha_{22}\, y + \alpha_{23}\, z \\ z' &=& \alpha_{32}\, y + \alpha_{33}\, z. \end{array} \right. \tag{2.45}$$

となる。

問題 2.20 式 (2.43)、(2.44) を導出せよ。

2.6.2 光速不変条件

変換式 (2.45) に対して、各座標軸に沿って伝播する光速不変条件を課す。

$+x$ 軸方向に伝播する光

S 系で $t = 0$ に原点 O から $+x$ 軸方向に発射された光は、S' 系でも $t' = 0$ で原点 O' から $+x'$ 軸方向に伝播する。その時空座標を S 系と S' 系で記述すると、光速が不変 c であるから、

$$(t, ct, 0, 0) \quad \leftrightarrow \quad (t', ct', 0, 0)$$

となる。この条件から、

$$\alpha_{01} = -\frac{V}{c^2}\, \alpha_{00} \tag{2.46}$$

をえる。

問題 2.21 式 (2.46) の導出を確かめよ。

$\pm y'$ 軸方向に伝播する光

S' 系で時刻 $t' = 0$ に $\pm y'$ 軸方向に発射された光は、S 系では斜め方向に進む。S 系でのこの光の x 座標は Vt なので、S 系と S' 系それぞれでの時空座標は、

$$(t, Vt, \pm\sqrt{c^2 - V^2}\, t, 0) \quad \leftrightarrow \quad (t', 0, ct', 0) \tag{2.47}$$

となり、これが座標変換を満たすことから

$$\alpha_{12} = \alpha_{32} = 0 \tag{2.48}$$

および

$$\alpha_{00}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \pm \alpha_{02}\sqrt{c^2 - V^2} = \alpha_{22}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

をえる。ここで、複号はそれぞれ $+y'$ 方向および $-y'$ 方向に伝播する光から導かれた条件で、どちらも同時に満たさなければならない。これらより

$$\alpha_{02} = 0, \quad \alpha_{00} = \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{2.49}$$

でなければならないことが分かる。

問題 2.22 式 (2.47) を説明し、式 (2.48)、(2.49) の導出を確かめよ。

$\pm z'$ 軸方向に伝播する光

同様の議論を $\pm z'$ 軸方向に伝播する光に対してもすることにより、

$$\alpha_{03} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = \alpha_{22} \tag{2.50}$$

をえる。

問題 2.23 式 (2.50) の導出を確かめよ。

これらの結果を用いると、変換式 (2.45) は

$$\left\{\begin{array}{rcl} t' &=& \dfrac{\alpha_{22}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\left(t - \dfrac{V}{c^2}\,x\right) \\ x' &=& \dfrac{\alpha_{22}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\Big(x - Vt\Big) \\ y' &=& \alpha_{22}\, y \\ z' &=& \alpha_{22}\, z. \end{array}\right. \tag{2.51}$$

となる。

2.6.3 空間反転対称性

最後に、空間反転対称性を考える。即ち、S′ 系に対して、$-x'$ 軸を $\overline{x'}$ 軸、$-y'$ 軸を $\overline{y'}$ 軸、z' 軸はそのまま $\overline{z'}$ 軸ととった座標系を $\overline{\mathrm{S}'}$ 系とし、S 系に対して、同様に $-x$ 軸を $\overline{x}$ 軸、$-y$ 軸を $\overline{y}$ 軸、z 軸はそのまま $\overline{z}$ 軸ととった座標系を $\overline{\mathrm{S}}$ 系とする[2]。すると、$\overline{\mathrm{S}'}$ 系から見ると、$\overline{\mathrm{S}}$ 系は $\overline{x'}$ 軸方向に速度 V で移動している。即ち、$\overline{\mathrm{S}'}$ 系と $\overline{\mathrm{S}}$ 系の関係は、S 系と S' 系の関係と同じなので、変換式 (2.51) で

$$(t,x,y,z), \quad (t',x',y',z') \quad \to \quad (t',\overline{x'},\overline{y'},\overline{z'}), \quad (t,\overline{x},\overline{y},\overline{z})$$

の置き換えをしたものも成り立っていなければならない。これに $\overline{x'}$ 等の定義

$$(t',\overline{x'},\overline{y'},\overline{z'}) = (t',-x,-y,z), \quad (t,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = (t,-x,-y,z)$$

を代入したものは元の変換式 (2.51) に一致しなければならないという条件、および $V=0$ で恒等変換になるという条件より

$$\alpha_{22} = 1 \tag{2.52}$$

をえる。

問題 2.24 式 (2.52) の導出を確かめよ。

---

[2] z 軸を反転させなかったのは、座標系を右手系（または左手系）に保つため。

第3章　相対論的力学

光速を不変にする座標変換としてローレンツ変換を求めた。これに電場と磁場の変換を加えた変換に対して、真空中のマックスウェル方程式が不変であることを示した。この章では、もう一つの物理の基本法則であるニュートンの運動方程式を修正して、ローレンツ変換に対して不変な形にする。得られた運動方程式から運動エネルギーと運動量の相対論的表式が与えられる。更に、これらの量のローレンツ変換による変換規則を求め、その変換の物理的意味を考察することによって、有名な公式 $E = Mc^2$、即ち、系のエネルギーがその質量として顕われることが導かれる。そのあざやかな論理展開を説明する。

3.1　相対論的運動方程式

この章では、簡単のために x 軸方向の一次元運動のみを考える。

物理法則が特殊相対性原理を満たすようにしたい。電磁気の法則は電場と磁場の変換を加えたローレンツ変換に対して不変なので、力学法則であるニュートンの運動方程式を修正してローレンツ変換に対して不変にするにはどうすればよいだろうか？

ニュートンの運動方程式は、惑星の運動などを正確に記述することが知られている。このことから、物体の速度 v が光速 c に比べて十分小さいときには良い近似を与えていると考えてよい。特に、質点が静止している座標系ではニュートンの運動方程式は厳密に正しいと仮定しよう。このような考察から、以下の２つの条件

条件１．極限 $v/c \to 0$ でニュートンの運動方程式に一致する

条件２．ローレンツ変換に対して不変

を満たす方程式を求める。

x 方向に速度 v で運動している粒子の加速度を考える。[1] ある瞬間の粒子の速度 v と同じ速度で等速並進運動している座標系を S′ 系とする。すると S′ 系でのその瞬間の粒子の速度はゼロである。S′ 系での粒子の加速度を a' とすると、上の条件１より S′ 系でニュートン方程式

$$ma' = f \tag{3.1}$$

が、その瞬間は成り立つはずだ。これを実験室系 S で見たらどうなるか。[2] a' と S 系での加速度 a との関係は、式 (2.34) で $u' = 0,\ u = v$ とおくこと

[1]後で得られる結果から $|v| < c$ でなければならないが、$|v| \ll c$ である必要はない。
[2]この章では S 系を実験室座標系、略して実験室系と呼ぶ。

によって

$$a' = a\,\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}^{\,3}} \tag{3.2}$$

と得られ、これを式 (3.1) に代入すると、S 系での運動方程式

$$m\,\frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}^{\,3}} = f \tag{3.3}$$

を得る。質量 m および力 f が座標系によらないとすれば、加速度の変換式 (2.34) より、この式 (3.3) はローレンツ変換に対して不変な形をしているので、条件 2 も満たし、求めていた運動方程式である。

式 (3.3) は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = f \tag{3.4}$$

と変形できる。そこで、**相対論的運動量** p を

$$p \equiv \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{3.5}$$

と定義する。すると式 (3.4) は、従来の非相対論的ニュートンの運動方程式と外形的には同じ形

$$\frac{dp}{dt} = f \tag{3.6}$$

に表すことができる。

問題 3.1 式 (3.3) より式 (3.4) を示せ。

問題 3.2 力 f が時間によらず一定の場合に、速度 v の時間発展を求めよ。$t \to \infty$ で速度 v はいくらになるか?

問題 3.3 加速度の変換式 (2.34) を用いて、力 f が座標系によらず同じであれば、運動方程式 (3.3) は全ての慣性系で同じ形であらわされることを説明せよ。

3.2 エネルギー保存則

力 f が保存力で、運動方程式 (3.3) がポテンシャル $U(x)$ を用いて

$$\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}^{\,3}}\,\frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx} \tag{3.7}$$

と表されるとき、エネルギー積分ができる。即ち、両辺に v をかけると

$$\text{左辺} = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}^{\,3}}\,v\,\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) \tag{3.8}$$

$$\text{右辺} = -\frac{dU}{dt}\,v = -\frac{dU}{dt}\,\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt}U\big(x(t)\big) \tag{3.9}$$

と変形できるので

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}+U(x)\right]=0$$

を得る。力学的エネルギー E を

$$E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}+U(x) \tag{3.10}$$

と定義すると、これは保存量で値は時間変化しない。式 (3.10) の第１項を

$$\varepsilon \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{3.11}$$

と記し、**相対論的運動エネルギー**と呼ぶ[3]。実際、これは $v/c \ll 1$ のとき

$$\varepsilon \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)=mc^2+\frac{1}{2}mv^2 \tag{3.12}$$

と近似され、mc^2 の項を除いて、確かにニュートン力学における運動エネルギーが得られる[4]。第１項の mc^2 は質量 m の物体が静止しているときにも持っているエネルギーという意味でを**静止エネルギー**という[5]。

問題 3.4 式 (3.8 および (3.9) を確かめよ。

3.3 運動エネルギーと運動量に対する座標変換

質量 m の粒子が速度 v で運動しているときの相対論的運動エネルギー ε と運動量 p

$$\varepsilon=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad p=\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{3.13}$$

は、x 方向に速度 V で運動する座標系 S′ で見るとどうなるだろうか?

S′ 系での粒子の速度を v' とすると、速度の合成則 (2.30) を用いて

$$v=\frac{V+v'}{1+Vv'/c^2}$$

の関係式を満たすが、これから導かれる式

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2=\frac{\left(1-(V/c)^2\right)\left(1-(v'/c)^2\right)}{\left(1+Vv'/c^2\right)^2}$$

[3]静止エネルギーを引いたものを相対論的運動エネルギーということも多いが、ここでは「現代物理学」（江沢洋著、朝倉書店、1996 年）の用法に従う。

[4] $\epsilon \ll 1$ の時の近似式 $(1+\epsilon)^n \approx 1+n\epsilon$ を用いた。

[5]この項から直ちに、いわゆる質量とエネルギーの同等性 $E=mc^2$ が導き出されるとする解説が数多くある。しかしこの表式は、質量 m の粒子が静止しているときにも mc^2 のエネルギーを持っているということを示すだけで、逆に、ポテンシャルエネルギーや電磁エネルギーなどのエネルギーが質量を与えることは意味しない。

を用いると、変換式

$$
\begin{aligned}
\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} &= mc^2 \frac{1+Vv'/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}\sqrt{1-(v'/c)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} + \frac{mv'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} V \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left[\varepsilon' + Vp' \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\
&= \frac{1+Vv'/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}\sqrt{1-(v'/c)^2}}\, m \left(\frac{V+v'}{1+Vv'/c^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left[\frac{mv'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} \frac{V}{c^2} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left[p' + \frac{V}{c^2} \varepsilon' \right]
\end{aligned}
$$

をえる。これらをまとめると、結局、運動エネルギーと運動量の変換則は、

$$
\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(\varepsilon' + \frac{V}{c}\, cp' \right) \tag{3.14}
$$

$$
cp = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(cp' + \frac{V}{c}\, \varepsilon' \right) \tag{3.15}
$$

で与えられる。これから、座標変換によって運動エネルギーと運動量は交じり合うことがわかる。

この変換式は、時間と位置の変換則 (2.17)

$$
ct = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(ct' + \frac{V}{c}\, x' \right) \tag{3.16}
$$

$$
x = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(x' + \frac{V}{c}\, ct' \right) \tag{3.17}
$$

と比較すると、

$$
(ct, x) \quad \leftrightarrow \quad (\varepsilon, cp) \tag{3.18}
$$

の対応関係があることがわかる。また、ミンコフスキー空間の距離 (2.25) に対応した

$$
\varepsilon^2 - (cp)^2 = m^2 c^4 \tag{3.19}
$$

が座標変換によって変わらないことを示すこともできる。この座標変換に対する不変量を使って、相対論的運動エネルギーと運動量の関係式として

$$
\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \tag{3.20}
$$

が得られる。

問題 3.5 $\varepsilon^2 - c^2p^2$ が座標変換 (3.14) および (3.15) によって変わらないことを示せ。

問題 3.6 復習：ニュートン力学の運動エネルギー $\varepsilon = \dfrac{1}{2}mv^2$ と運動量 $p = mv$ は、ガリレイ変換の下では

$$\varepsilon = \varepsilon' + Vp' + \frac{1}{2}mV^2, \qquad p = p' + mV \tag{3.21}$$

と変換されることを確かめよ[6]。

問題 3.7 光子のエネルギーは $\varepsilon = \hbar\omega$、運動量は $p = \hbar k$ と表されることを用いて、エネルギーと運動量のローレンツ変換式 (3.14) と (3.15) より、光のドップラー効果の式 (2.38) と (2.39) を導け。

3.4 質点系のエネルギーと運動量の変換則

これまでは、一つの粒子の運動エネルギーと運動量を扱ってきたが、複数の粒子からなる系の全体のエネルギーと運動量の変換則を考えよう。粒子系には外力は働いておらず、系全体のエネルギーおよび運動量は保存する、即ち、時間変化しないとする。

3.4.1 独立粒子系の場合

まず、相互作用しない N 個の質点からなる独立粒子系を考える。相互作用しないので、系のエネルギーは運動エネルギーだけである。実験室座標系 S での、i 番目の粒子の運動エネルギー ε_i と運動量 p_i は

$$\varepsilon_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(v_i/c)^2}}, \quad p_i = \frac{m_i v_i}{\sqrt{1-(v_i/c)^2}}; \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{3.22}$$

で与えられ、全運動エネルギー $\mathcal{E}$、全運動量 $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{E} \equiv \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i, \qquad \mathcal{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} p_i \tag{3.23}$$

とする。同様に、S$'$ 系での i 粒子の運動エネルギー ε'_i と運動量 p'_i、および、全運動エネルギー $\mathcal{E}'$ と全運動量 $\mathcal{P}'$

$$\mathcal{E}' = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon'_i, \qquad \mathcal{P}' = \sum_{i=1}^{N} p'_i \tag{3.24}$$

を考える。すると、各粒子に対して変換式 (3.14) および (3.15) が成り立つので、全運動エネルギーと全運動量に対しても変換式

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\left(\mathcal{E}' + \frac{V}{c}c\mathcal{P}'\right) \tag{3.25}$$

$$c\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\left(c\mathcal{P}' + \frac{V}{c}\mathcal{E}'\right) \tag{3.26}$$

が成り立つことは、すぐにわかる。

[6] ε は p' に依存するが、p は ε' に依らないことに注意。

3.4.2 重心座標系への変換

質点系の全運動量がゼロになる座標系を**重心座標系**という。重心座標系を S_0 系とし、S 系に対して一定速度速度 V で移動しているとする。定義より重心座標系での全運動量 $\mathcal{P}_0$ はゼロなので[7]、変換式 (3.25) および (3.26) より、$\mathcal{E}$ と $\mathcal{P}$ は重心系での全運動エネルギー $\mathcal{E}_0$ を用いて

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,\mathcal{E}_0, \qquad \mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{c^2}\right)V \tag{3.27}$$

と表される。これらの式を見ると、重心系 S_0 での<u>全運動エネルギー</u> $\mathcal{E}_0$ を c^2 で割ったものを

$$\mathcal{M} \equiv \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} \tag{3.28}$$

とおくと、実験室系 S での運動エネルギーと運動量は

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{M}c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad \mathcal{P} = \frac{\mathcal{M}V}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{3.29}$$

と表され、質量 $\mathcal{M}$、速度 V の１つの粒子の運動エネルギーと運動量の式 (3.13) と同じ形になることが分かる。即ち、**重心系 S_0 での全運動エネルギーを c^2 で割った $\mathcal{M}$ は系全体の質量のような役割を果たす。** i 番目の粒子の重心座標系 S_0 での速度を v_{0i} とすると、$\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\sqrt{1-(v_{0i}/c)^2}}$$

で与えられる。これは、単純な質量の和

$$M_T \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$$

より大きいことに注意しよう。

問題 3.8 ニュートン力学の場合にはガリレイ変換の下、式 (3.27) に相当する関係は、

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{1}{2}M_T V^2, \qquad \mathcal{P} = M_T V \tag{3.30}$$

となることを示せ[8]

3.4.3 相互作用する粒子系の場合

これまでの考察は独立粒子系の単なる座標変換式 (3.14)∼(3.15) に基づき、更にもとをたどれば、式 (3.16)∼(3.17) による。即ち、式 (3.27) は運動エネルギー・運動量の変換式を重心系に対して書き下したもので、ローレンツ変換から単純な計算によって導かれた関係式に過ぎないとも言える。

[7]重心座標系 S_0 での物理量は $\mathcal{P}_0$ のように添字の 0 をつける。

[8]ガリレイ変換では、運動量の式には $\mathcal{E}_0$ は含まれないことに注意。ローレンツ変換 (3.27) の場合には<u>運動量</u>の表式に $\mathcal{E}_0$ が含まれる。これがこの後の議論で重要になる。

しかし、相互作用がある場合には、式 (3.27) がそのまま成り立つとは考えられない。即ち、相互作用する場合には運動エネルギーと他のエネルギーとの間のやり取りがあるので、全運動エネルギー $\mathcal{E}_0$ は時間変化する。式 (3.27) では S 系での全運動量 $\mathcal{P}$ が $\mathcal{E}_0$ で表されているので $\mathcal{P}$ も時間変化し、このままでは運動量保存則と矛盾してしまう！

ローレンツ変換とエネルギー・運動量保存則とを調和させるには、式 (3.27) の中の運動エネルギーを系の全エネルギーで置き換えるのが自然だ。そうすれば、全エネルギーは保存するので運動量も保存する。

このような考察から、相互作用のある粒子系の場合には、式 (3.27) の $\mathcal{E}$ および $\mathcal{E}_0$ を S 系および重心系 S_0 での全エネルギー E および E_0 で置き換えた関係式

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\, E_0, \qquad \mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(\frac{E_0}{c^2}\right) V \tag{3.31}$$

が成り立っているとしよう。すると、重心系 S_0 での全エネルギー E_0 を用いて

$$M \equiv \frac{E_0}{c^2} \tag{3.32}$$

を定義すると、

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad \mathcal{P} = \frac{MV}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{3.33}$$

と、質量 M の粒子のように振る舞う。この "質量" には粒子の相互作用エネルギーの寄与も含まれることに注意しよう。

この議論は、いわゆる力学的エネルギーにとどまらず、例えば電磁場のエネルギーのように、運動エネルギーに変換されうる全てのエネルギーに当てはまるので[9]

M は重心系でのあらゆるエネルギーの総和を c^2 で割ったもの

でなければならないということが結論される。

問題 3.9 式 (3.33) より、式 (3.20) と同様の関係式

$$E = \sqrt{M^2c^4 + c^2\mathcal{P}^2} \tag{3.34}$$

が成り立つことを示せ。

3.4.4 例：複合粒子の分裂

このことを具体的な例で見るために、複合粒子の分裂を考えよう（図 3.1）。複合粒子は同じ質量 m の 2 つの粒子からなるとする。それらが結合しているとき、粒子間には重心系で正の相互作用エネルギー $U_0(>0)$

[9]相対論的力学においては、単純な相互作用ポテンシャルはローレンツ変換に対して不変でないので、必然的に電磁場のエネルギーを考える必要がある。

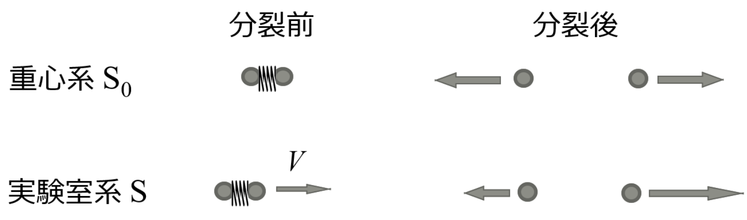


図 3.1: 2 粒子からなる複合粒子の分裂。重心系 S_0（上図）と実験室系 S（下図）で見た場合。実験室系では複合粒子は速度 V で運動している。

があり、分裂後は相互作用しないとする。分裂前は一つの複合粒子として速度 V で運動していたが、ある時 2 つに分裂した。その過程で 2 粒子間の相互作用以外の外力は働かず、従って分裂の前後で全系の力学的エネルギーと運動量は変わらない。

重心座標系 S_0 **系：**

この複合粒子の分裂の様子を重心系 S_0 で観察する（図 3.2）。分裂前には複合粒子は静止しており、その全エネルギー E_0 と全運動量 $\mathcal{P}_0$ は

$$E_0 = 2mc^2 + U_0, \qquad \mathcal{P}_0 = 0 \tag{3.35}$$

である。

分裂後は、質量 m の粒子が左右に同じ速さ v_0 で飛び出す。左右に飛び出す粒子の運動エネルギー ε_{0L} と ε_{0R} は等しく、エネルギー保存則から

$$\varepsilon_{0L} = \varepsilon_{0R} = \frac{1}{2}E_0 \tag{3.36}$$

となる。一方、 2 つの粒子の運動量 p_{0L} と p_{0R} は、運動量の保存則から、

$$p_{0L} = -p_{0R} \equiv -p_0 \tag{3.37}$$

で、p_0 は v_0 を用いて

$$p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$$

と与えられる。

問題 3.10 分裂した 2 つ粒子の重心系 S_0 での速さ v_0 を求めよ。

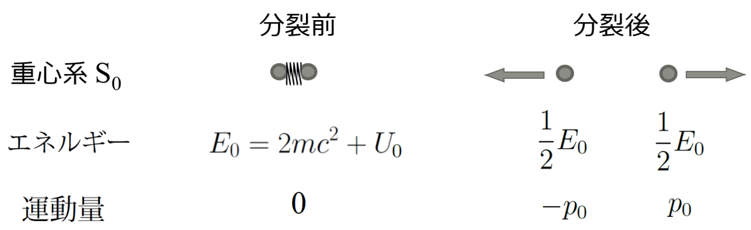


図 3.2: 分裂前後の重心系 S_0 でのエネルギーと運動量。

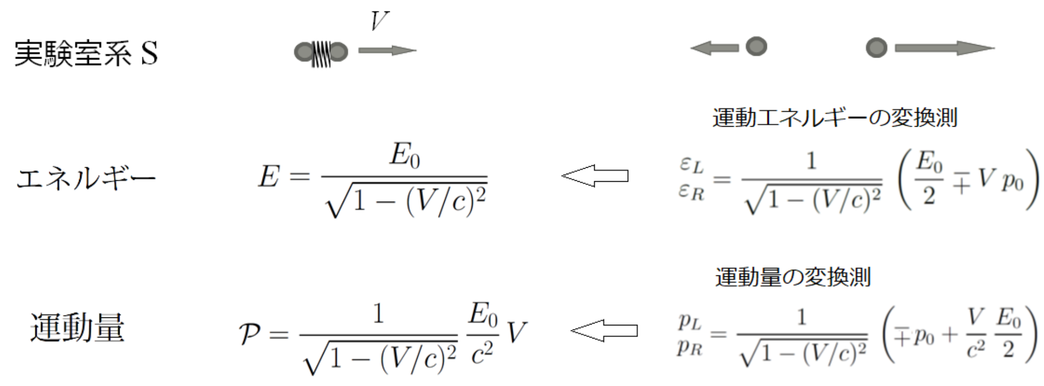


図 3.3: 分裂前後の実験室系 S でのエネルギーと運動量。

実験室座標系 S 系：

この複合粒子の分裂を実験室系で観察するとどうなるか（図 3.3）。まず、分裂後の 2 粒子の運動エネルギー ε_L および ε_R は、変換式 (3.14) を用いて

$$\varepsilon_L = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(\frac{E_0}{2} - V\,p_0\right),$$
$$\varepsilon_R = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(\frac{E_0}{2} + V\,p_0\right)$$

と与えられる。同様に、分裂後の運動量 p_L と p_R は変換式 (3.15) より

$$p_L = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(-p_0 + \frac{V}{c^2}\frac{E_0}{2}\right),$$
$$p_R = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(p_0 + \frac{V}{c^2}\frac{E_0}{2}\right)$$

である。これらを用いると、分裂前の複合粒子の全エネルギー E と全運動量 $\mathcal{P}$ は、エネルギーおよび運動量保存則より、

$$E = \varepsilon_L + \varepsilon_R = \frac{E_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{3.38}$$
$$\mathcal{P} = p_L + p_R = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \left(\frac{E_0}{c^2}\right) V \tag{3.39}$$

で与えられることがわかる（図 3.4）。

既に議論したように、関係式 (3.38) および (3.39) は、変換式 (3.27) において運動エネルギーを全エネルギーで置き換えた式 (3.31) に他ならない。

複合粒子の質量

これら表式 (3.38) および (3.39) は、分裂前の複合粒子の質量を

$$M = E_0/c^2 = 2m + U_0/c^2 \tag{3.40}$$

	重心系 S_0	実験室系 S
		
エネルギー	$E_0 = 2mc^2 + U_0$	$E = \dfrac{E_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$
運動量	$\mathcal{P}_0 = \mathbf{0}$	$\mathcal{P} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\dfrac{E_0}{c^2}V$

図 3.4: 重心系 S と実験室系 S での複合粒子のエネルギーと運動量。

とすると、粒子の運動エネルギーと運動量の表式 (3.13) と同じ形

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad \mathcal{P} = \frac{MV}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{3.41}$$

となる。この複合粒子の質量 M は構成粒子の質量の和 $M_T = 2m$ よりも

$$\delta M \equiv M - M_T = U_0/c^2 \tag{3.42}$$

だけ大きい。つまり、

> 複合粒子の運動エネルギーの表式 (3.41) のなかに、
> 相互作用のポテンシャルエネルギーの寄与が、質量の形で含まれている

ことが分かる。別の言葉でいうと、

> **隠れているはずのポテンシャル (potential) エネルギーが、**
> **質量として外から見える**

ということだ[10]。

運動によるエネルギーの増分

　このことを確かめるために、複合粒子が速度 V で運動していることによるエネルギーの増分を計算してみよう。これは、分裂前の複合粒子のエネルギーについて、実験室系での値 E から重心系での値 E_0 を引いた量 $E - E_0$ で与えられる。$V/c \ll 1$ のとき、これは

$$\begin{aligned} E - E_0 &= E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - 1\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{c^2}\right)V^2 = \frac{1}{2}\left(2m + \frac{U_0}{c^2}\right)V^2 \end{aligned} \tag{3.43}$$

と近似される。確かにこれは、質量が E_0/c^2 の粒子のニュートン力学における運動エネルギーの表式に一致し、複合粒子の質量が構成粒子の質量の和より U_0/c^2 だけ大きいことを示している。

[10] 英語の "potential" は "潜在的" という意味。

3.5　静止エネルギーは質量として顕われる

前節の議論をまとめると、相互作用する多粒子系の場合は、変換式(3.27)は運動量保存則に矛盾しており、エネルギーと運動量の保存則を前提とすると、むしろ全運動エネルギー $\mathcal{E}$ および $\mathcal{E}_0$ を全エネルギー E および E_0 で置き換えた関係式 (3.31) が成り立っているとすべきだ。

系の質量を定義した式 (3.28) も、

$$M \equiv E_0/c^2 \tag{3.44}$$

と修正しなければならない。ここで、E_0 は重心系 S_0 での相互作用エネルギーと運動エネルギーを合わせた全エネルギーである。その結果、式 (3.29) の第一式の右辺で与えられるのは実験室系での全力学的エネルギー E である。即ち、構成粒子間の相互作用エネルギーが質量の形で複合粒子の運動エネルギーの中に含まれている。別の言葉でいうと、

重心系での全エネルギーが E の系は、質量 $M = E/c^2$ の物体として振る舞う

ということで、これがいわゆる有名な公式

$$E = Mc^2 \tag{3.45}$$

が意味することである。重心系での全エネルギーをその物体の**静止エネルギー**と呼ぶ。

ここでは２粒子間の相互作用エネルギーを例に議論をしたが、すでに述べたように、質量として顕われるエネルギーはこれに限らない。電磁エネルギーなど、粒子の**運動エネルギー**に変換されうるあらゆる形のエネルギーに対して同様な議論が成り立つので、それらを含む物体の重心系でのエネルギーが質量として顕れているはずである[11]。

注意して欲しいのは、この有名な等式 (3.45) が表しているのは、質量 M が消えてエネルギー $E(= Mc^2)$ に変換されるということではなく、

エネルギー E が質量 E/c^2 として顕れている

と言うことである[12]。今の複合粒子の例で言えば、相互作用のポテンシャルエネルギーが質量に変換されたのではなく、隠れていると思っていたポテンシャルエネルギーが質量として外に顕れていたということだ。複合粒子が分裂するとポテンシャルエネルギーが運動エネルギーに変換されるが、今度は、運動エネルギーが質量として顕われるので、全体を一つの系と見た時の質量は変わらない。この運動エネルギーが例えば熱と

[11]実際、アインシュタインは、物体と電磁波とのエネルギーのやりとりについての考察から、エネルギーと質量の等価性を導いている。ちなみに、用いた記号が違うため、アインシュタインの原著論文には $E = mc^2$ という有名な関係式は出てこない。

[12]この意味で、「質量とエネルギーの等価性」は、いわゆる「熱と仕事の等価性」とは全く異なる。即ち、「熱と仕事の等価性」とは、「熱」が「仕事」に、或いは逆に「仕事」が「熱」に変換され、その際の変換レートが、1 cal あたり約 4.2 J（仕事当量）ということ。

して注目している系の外に流出したときに初めて、流出したエネルギーに相当する分だけ系の質量が減るのである[13]。

原子力として利用されているウラン 235 は、中性子を吸収して分裂する。その核反応の一つとして

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \quad \rightarrow \quad {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\,{}^{1}_{0}\mathrm{n} $$

のような核分裂があるが[14]、その際、分裂前と分裂後の質量の差に相当する相互作用エネルギーがまず分裂核と中性子の運動エネルギーに変換され、それが外部に散逸し、通常は熱になる。

問題 3.11 上のウランの核分裂反応の両辺の質量の差を求め、核分裂でどれぐらいのエネルギーが熱として取り出せるか計算してみよ。それを化学反応、例えば水素の燃焼反応のエネルギーと比較してみよ。

問題 3.12 日本語の Wikipedia の $E = mc^2$ の項目には、

> この等価性の帰結として、質量の消失はエネルギーの発生を、エネルギーの消失は質量の発生をそれぞれ意味する。したがってエネルギーを転換すれば無から質量が生まれる。

と、明らかに誤った記述がされている。これをより正確な表現に改めよ。ヒント：対応する英語の Wikipedia の説明は正確である。

3.6 附録１：非相対論の場合

同じような粒子の分裂を、非相対論的なニュートン力学とそのガリレイ変換で考えるとどうなるか? 重心系（S_0 系）で静止していた結合粒子が２つに分裂したとする。分裂前の運動エネルギー $\mathcal{E}_{0B}$ と運動量 $\mathcal{P}_{0B}$ はどちらもゼロ:

$$ \mathcal{E}_0 = 0, \qquad \mathcal{P}_0 = 0 $$

分裂後の運動エネルギー $\mathcal{E}_{0A}$ と運動量 $\mathcal{P}_{0A}$ はエネルギー保存則と運動量保存則から

$$ \mathcal{E}_{0A} = U_0, \qquad \mathcal{P}_{0A} = 0 $$

[13]ただ、「質量がエネルギーに変換される」という不正確な（間違った）表現は、世の中にあふれている。例えば、2016 年の重力波検出の際の LIGO による公式の発表文書にさえ、“converting a portion of the combined black holes’ mass to energy”（合体したブラックホールの質量の一部をエネルギーに変換して）と書かれている。より正確には、“converting a portion of the combined black holes’ mass to gravitational wave”（合体したブラックホールの質量の一部を重力波に変換して）、或いは “emitting the gravitational waves, whose energy corresponds to a portion of the combined black holes’ mass”（合体したブラックホールの質量の一部に相当するエネルギーの重力波を放出して）とでもすべきであろう。日本の国立天文台のサイトの記事では「2 つのブラックホールが合体した瞬間には、太陽全質量の 3 倍と同等のエネルギーが放出されました。」とあり、正確な表現を用いている。

[14]例えば、${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ は、235 が質量数（陽子と中性子の数の和）、92 が陽子の数を表す。

	分裂前		分裂後	
	運動エネルギー	運動量	運動エネルギー	運動量
S_0 系	0	0	U_0	0
S 系	$\frac{1}{2}(2m)V^2$	$(2m)V$	$U_0+\frac{1}{2}(2m)V^2$	$(2m)V$

表 3.1: 分裂前後の非相対論的運動エネルギーと運動量 (ガリレイ変換の場合)

と与えられる。これから、分裂後の重心系での粒子の速度 $\pm v_{0A}$ は、

$$2\left(\frac{1}{2}\,m\,v_{0A}^2\right)=U_0$$

と計算できる。

これを実験室系（S 系）で見ると、重心系へのガリレイ変換の式 (3.30) を用いて、分裂前は

$$\mathcal{E}_B=\frac{1}{2}(2m)\,V^2,\quad \mathcal{P}_B=(2m)\,V$$

分裂後は

$$\mathcal{E}_A=U_0+\frac{1}{2}(2m)\,V^2,\quad \mathcal{P}_A=(2m)\,V$$

となる。当然のことながら、ガリレイ変換 (3.30) では運動量はエネルギー $\mathcal{E}_0$ によらないので、$\mathcal{P}_B=\mathcal{P}_A$ となり、複合系の質量を $2m$ として矛盾はない。

3.7 附録２：$E=Mc^2$ の初等的な導出

光が光子と呼ばれる粒子の集まりであり、そのエネルギー ε と運動量の大きさ p の間に、関係式

$$\varepsilon=cp \tag{3.46}$$

が成り立つことを用いると、以下のような初等的な考察で物体のエネルギーと質量の関係を導くことができる。

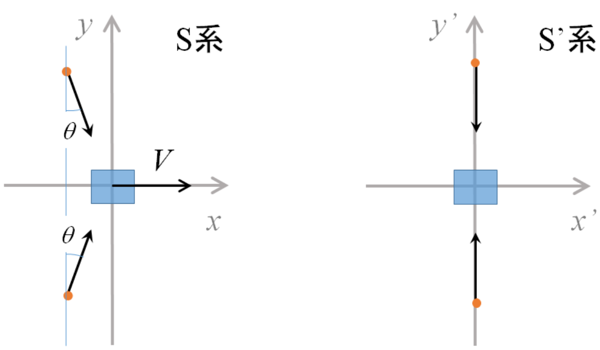


図 3.5: 反対方向から飛んできた 2 つの光子が物体に吸収される過程を 2 つの座標系から見た様子。

S′ 系は、静止系 S に対してその x 軸方向に速度 V で運動しているとする。S′ 系において、エネルギー ε、運動量 p の 2 つの光子が y' 軸の正負の反対方向から飛んできて、静止している物体に吸収されたとする。2 つの光子の運動量は打ち消しあってゼロなので、運動量保存則から光子を吸収した後も物体の運動量はゼロで、S′ 系において静止している。

この過程を S 系で観察するとどうなるか、V/c の一次の近似で考察する。すると、S 系においても光子のエネルギーは ε、運動量は p で、光子は y 軸に対して角度 θ で後方から物体に衝突して吸収される（図 3.5)。その角度 θ は

$$\tan\theta = \frac{V}{c} \tag{3.47}$$

で近似できる。

一方、物体は S′ 系で静止したままなので、S 系で見ると 2 つの光子を吸収する前も吸収した後も同じ速度 V で運動し続ける。エネルギー保存則と運動量保存則を用いると、S 系で見た吸収前後の物体のエネルギーの増加 ΔE および運動量の増加 ΔP は、それぞれ

$$\Delta E = 2\varepsilon, \qquad \Delta P = 2p\tan\theta$$

でなければならない。ここで、式 (3.47) と (3.46) を用いると、

$$\frac{\Delta P}{V} = \frac{\Delta E}{c^2}$$

を得る。物体の質量は $M = P/V$ で与えられるので、左辺は物体の質量の増分 ΔM と解釈でき、関係式

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2}$$

を得る。すなわち、物体に吸収されたエネルギーはその質量の増加として外に顕れる。エネルギーの原点は適当に取ることができるので、E を物体に含まれるエネルギーとして、関係式

$$M = \frac{1}{c^2}\,E$$

が成り立つとすることができる。

問題 3.13 関係式 (3.46) を、アインシュタイン・ドブロイの関係式

$$\varepsilon = h\nu, \qquad p = h/\lambda$$

より導け。ただし、ν と λ は光の振動数と波長、h はプランク定数である。

問題 3.14 ここでの議論が正しいことを、ローレンツ変換を用いて確かめよ。

問題 3.15 光子ではなく質量 m の粒子が上下から飛んできて物体に吸収される場合、この議論はどうなる。