

# 量子論入門 講義ノート

中西 秀

2023年3月31日

# はじめに

基幹物理学 II の後半の量子力学の講義の目的は、

**量子力学が記述する世界が如何に不思議なものか**

を理解することです。

量子力学の建設に深く関わった Einstein は、「神はサイコロを振らない」と述べ、更に「量子力学の自然記述は不完全」と断じ、出来上がった量子力学を受け入れませんでした。Richard Feynman も、その有名なシリーズ講演 “The Character of Physical Law” (Cornell University, 1964)<sup>1</sup> で

I can safely say that nobody understands quantum mechanics.

と述べています。実際、量子力学が我々に要求する自然認識の変更は、相対性理論と比べても桁はずれで、今日でもその解釈を巡っては様々な議論を呼び起こしています。

量子力学を勉強する学生の立場としては、この解釈の難しさ以外に、理論の理解に必要な数学的道具立ての難しさや、理論と物理対象との関係が古典力学と比べて複雑であることなど、様々な障害があり一筋縄ではゆきません。

基幹物理学 II で量子力学に割り当てられる時間は半期の約半分で、8コマしかありません。そのため、量子力学の技術的な解説は最小限にとどめ、講義の焦点を

**量子力学が解き明かしたミクロな世界の現象が、日常生活に基づく我々の自然認識から如何にかけ離れたものか**

ということに絞ります。量子力学の全貌については、2年後期以降の専門課程での講義のお楽しみとしてください。

この講義ノートは、講義の予習や復習のために公開しています。量子力学の本格的な勉強のためには、他の適切な参考書を合わせて読まれることをおすすめします。

---

<sup>1</sup>講演のビデオは、[openculture.com](http://openculture.com) のサイトで見るすることができます。ここに引用した台詞は Lecture Six の7分40秒辺りにあります。また、講演の筆記記録は “The Character of Physical Law” (Penguin, 1992) として出版されていますが、web 上にも pdf ファイルがあるようです。

# 目次

<b>第1章</b>	<b>粒子と波動</b>	<b>5</b>
1.1	弾丸の2重スリット実験 . . . . .	5
1.2	波の2重スリット実験 . . . . .	6
1.2.1	波の干渉パタンの数学 . . . . .	7
1.3	粒子と波 . . . . .	8
1.4	電子の不思議な振る舞い . . . . .	8
1.4.1	電子は粒子として観測される . . . . .	9
1.4.2	電子の観測頻度の空間分布は干渉を示す . . . . .	9
1.4.3	2つの結果の“矛盾点” . . . . .	9
1.4.4	確率分布が波の干渉パターンと同じ形 . . . . .	10
1.4.5	まとめ . . . . .	10
1.5	電子の監視実験 . . . . .	11
1.5.1	電子を監視する . . . . .	11
1.5.2	光源を弱くする . . . . .	12
1.5.3	光源の波長を長くする . . . . .	13
1.5.4	監視実験のまとめ . . . . .	13
1.6	確率振幅と確率分布 . . . . .	13
1.6.1	神はサイコロを振るのか? . . . . .	14
1.7	ハイゼンベルグの不確定性原理 . . . . .	16
1.7.1	不確定性関係とドブロイの式 . . . . .	16
1.7.2	2重スリット実験の干渉パターンと不確定性関係 . . . . .	17
<b>第2章</b>	<b>量子力学の定式化</b>	<b>19</b>
2.1	シュレディンガー方程式 . . . . .	19
2.1.1	古典的波動方程式 . . . . .	19
2.1.2	波の複素数表示 . . . . .	20
2.1.3	(時間に依存する)シュレディンガー方程式 . . . . .	21
2.1.4	時間に依存しないシュレディンガー方程式 . . . . .	22
2.1.5	波動関数の規格化 . . . . .	23
2.1.6	【付録】変数分離法 . . . . .	24
2.2	ハミルトニアンとその固有値・固有関数 . . . . .	25
2.2.1	ハミルトニアンは線形演算子 . . . . .	25
2.2.2	ハミルトニアンはエルミート演算子 . . . . .	25
2.2.3	エルミート演算子の固有値は実数 . . . . .	26
2.2.4	異なる固有値に対する固有関数は直交する . . . . .	26
2.2.5	ハミルトニアンの固有関数は完全系を成す . . . . .	27
2.3	物理量とその観測 . . . . .	28

2.3.1	波動関数と物理量の測定結果	29
2.3.2	例：運動量	30
2.3.3	例：位置	30
2.3.4	物理量の非可換性	31
2.4	線形代数との関係	31
2.4.1	ディラックのブラベクトルとケットベクトル	33
2.5	2つの部分からなる系（複合系）の波動関数	34
2.5.1	2変数関数の完全系	34
2.5.2	演算子の作用	35
2.5.3	複合系の状態のベクトル表記	35
<b>第3章</b>	<b>量子力学の解釈</b>	<b>37</b>
3.1	コペンハーゲン解釈	37
3.1.1	シュレディンガー方程式に従う時間変化	37
3.1.2	観測に伴う変化	37
3.2	2つの物理量の逐次測定	38
3.2.1	可換な物理量の場合	39
3.2.2	非可換な物理量の場合	39
3.3	シュレーディンガーの猫	40
<b>第4章</b>	<b>量子相関とその解釈</b>	<b>43</b>
4.1	光の偏光	43
4.1.1	古典電磁気学における光の偏光	43
4.1.2	量子力学的記述	45
4.1.3	偏光測定	45
4.1.4	2光子系の状態ベクトル	46
4.2	2光子絡み合い状態	47
4.3	2光子偏光実験	48
4.4	EPRの量子力学批判	50
4.4.1	光子IIの偏光の実在性	50
4.4.2	光子IIの偏光状態の非局所性	51
4.4.3	量子力学の記述の不完全性	51
4.4.4	隠れた変数理論	52
4.4.5	量子状態の非局所性と情報伝達	52
4.5	ベル不等式	53
4.5.1	2方向の偏光板設定の2光子実験の解釈	54
4.5.2	3方向の偏光板設定のある2光子実験	54
4.5.3	隠れた変数理論から導かれる不等式 – ベル不等式	57
4.5.4	ベル不等式とアスペの実験の意味	59
4.6	野球原理	60
4.6.1	弱い野球原理と強い野球原理	60
4.6.2	2光子偏光実験における野球原理	61
4.6.3	非常に強い野球原理	64
4.7	付録：合成系の絡み合い状態とSchmidt分解定理	65

第5章	量子テレポーテーション	68
5.1	量子複製不可能定理	68
5.1.1	量子複製を用いた超光速通信	68
5.1.2	量子複製不可能定理	69
5.2	量子テレポーテーション	70
5.2.1	ベル基底とベル測定	70
5.2.2	量子テレポーテーションの手順	71

# 第1章 粒子と波動

古典力学の世界では粒子と波動はまったく異なる振る舞いをする。粒子は、決まった位置と速度をもっていて、ニュートンの運動方程式に従った一つの軌跡にそって運動する。一方、波は空間を満たす媒質の振動だ。そのため波長と振動数で特徴づけられ、空間的に広がって伝播し、異なる経路からの波が干渉する<sup>1</sup>。原子や分子は粒子として振る舞い、光や音は波として振る舞うことは、経験的によく知られている。

この章では、典型的な粒子と波の振る舞いを見た後に、電子の粒子とも波ともつかない振る舞いを説明し、電子のこの振る舞いのどこがどう不思議なのかを議論する。

## 1.1 弾丸の2重スリット実験

粒子の例として弾丸を考える。2つのスリットの開いた壁に向かって機関銃で弾丸を乱射したとする(図1.1)。スリットを通り抜けた弾丸は、その背後の止め板に到達し、弾痕を残す。弾痕はどのようなパタンになるだろうか？

弾丸は決して分裂しないとすると、弾痕はスリットを通り抜けた弾丸一つに対して一つ生じる。多数の弾丸を発射した後は、弾痕の空間分布は単純なピークを示すだろう。まず、スリット1だけを開けた場合を考える。その場合の弾痕は、スリット1の背後にピークを持った分布をなすだろう。それを  $P_1(x)$  とする。次に、スリット2だけを開けた場合を考える。すると今度は、スリット2の背後にピークを持った分布  $P_2(x)$  となるだろう。最後に、スリット1とスリット2両方を開けて 同じ実験をする。

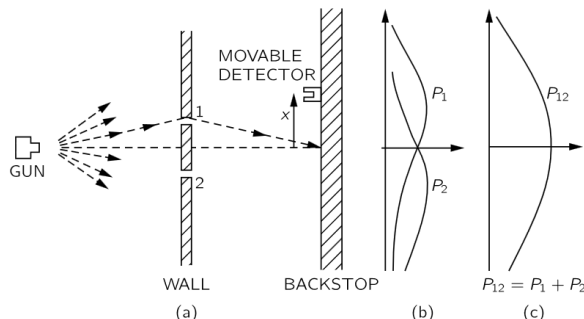


図 1.1: 弾丸の干渉実験 : The Feynman Lectures on Physics III より

<sup>1</sup>これらは、相対性理論による修正を加えた後も変わらない。

その場合の弾痕の分布  $P_{12}(x)$  はどうなるだろうか？明かに

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x) \quad (1.1)$$

となるはずである。その理由は単純だ。それぞれの弾痕はスリット 1 かスリット 2 のどちらかを通り抜けてきた弾丸によるもので、さらに、スリット 1 を通り抜けた弾丸はスリット 2 の存在には影響されないし、スリット 2 を通り抜けた弾丸はスリット 1 の影響を受けないからである。それ故、すべての弾痕の分布は、片方だけが開いた場合の分布の単純な和にならなければならない。

## 1.2 波の 2 重スリット実験

さて、次に機関銃を波源に置き換えて、波の干渉実験を考えてみよう。波としては、音波や電磁波（光）などを考えることができるが、それぞれ、ニュートン力学あるいは古典電磁気学を用いて、その波が従う方程式を導くことができる。

いずれの波の場合でも、波源から出た波が 2 つのスリットを通過して右の壁に到達する。スリット 1 とスリット 2 からそれぞれを中心とする同心円状の波が伝播し、干渉する。

右の壁の位置での波の強度を測定したとしよう。波の強度  $I$  は、単位面積を単位時間に通る波の運ぶエネルギーで定義され<sup>2</sup>、それは一般に波の振幅  $A$  の 2 乗に比例する、すなわち

$$I \propto |A|^2. \quad (1.2)$$

となる。このことは、ニュートン力学、或いは、古典電磁気学から導かれる、音波や電磁波を記述する方程式を用いて示すことができる。

まず、波の強度  $I$  は任意の正の実数、すなわち連続な値をとる。次に、両方のスリットが開いたときの壁での強度分布  $I_{12}(x)$  は、スリット 1 だ

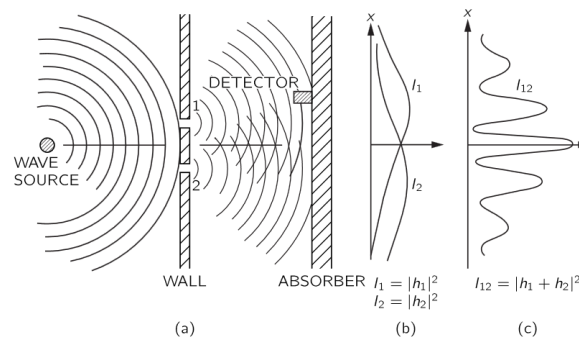


図 1.2: 波の干渉実験：The Feynman Lectures on Physics III より

<sup>2</sup> 水面の波のように 2 次元の波の場合は、単位長さ・単位時間当たり通過するエネルギー。

けが開いたときの強度分布  $I_1(x)$  とスリット 2 だけが開いたときの強度分布  $I_2(x)$  の和にはならない：

$$I_{12}(x) \neq I_1(x) + I_2(x). \quad (1.3)$$

理由は、両方のスリットが開いたときの壁での波の振幅には、スリット 1 からとスリット 2 からの 2 つの寄与があるからだ。これを干渉という。このため、壁での波の強度に、片方のスリットだけの場合にはない、細かなパターンが現れる。

### 1.2.1 波の干渉パタンの数学

この干渉パターンを、波の複素数表示を用いて計算してみよう。スリット 1 または 2 だけが開いたときの波の変位は複素関数を用いて、それぞれ

$$h_1(x)e^{-i\omega t} = |h_1(x)|e^{i\theta_1(x)}e^{-i\omega t} \quad (1.4)$$

$$h_2(x)e^{-i\omega t} = |h_2(x)|e^{i\theta_2(x)}e^{-i\omega t} \quad (1.5)$$

と表される<sup>3</sup>。位相  $\theta_i(x)$  は、それぞれの経路の長さ  $\ell_i(x)$  を波の波長  $\lambda$  で割って  $2\pi$  をかけたもの

$$\theta_i(x) = 2\pi \frac{\ell_i(x)}{\lambda}; \quad (i = 1, 2) \quad (1.6)$$

で与えられる。位置  $x$  での波の振幅は  $|h_1(x)|$  および  $|h_2(x)|$  なので、それぞれ、片方のスリットのみ開けた場合の波の強度は

$$I_1(x) = |h_1(x)|^2, \quad I_2(x) = |h_2(x)|^2 \quad (1.7)$$

で与えられる<sup>4</sup>。両方のスリットが開いたときに波の変位  $h_{12}(x)$  は片方だけ開いた場合の和

$$h_{12}(x)e^{-i\omega t} = (h_1(x) + h_2(x))e^{-i\omega t} \quad (1.8)$$

となり、強度はその絶対値の 2 乗

$$\begin{aligned} I_{12}(x) &= |h_1(x) + h_2(x)|^2 = (h_1(x) + h_2(x))(h_1^*(x) + h_2^*(x)) \\ &= |h_1|^2 + |h_2|^2 + h_1h_2^* + h_2h_1^* = I_1 + I_2 + 2\text{Re}(h_1h_2^*) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \delta(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

で与えられる<sup>5</sup>。但し、 $\delta(x)$  は 2 つの経路の位相差

$$\delta(x) \equiv \theta_1(x) - \theta_2(x) = (\ell_1(x) - \ell_2(x)) \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.10)$$

である。式 (1.9) の最後の項が、2 つのスリットを通り抜けてきた波の間の干渉を表す。

<sup>3</sup>オイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  による、波動の複素関数表示を用いている。実際の物理量(今の例では変位)はこれらの式の実部で与えられる。

<sup>4</sup>表式を簡単にするため、以下では比例係数を 1 とし、強度は振幅の 2 乗で与える。

<sup>5</sup>複素数  $c = a + ib$  の複素共役を  $c^* = a - ib$  と表す。すると、絶対値の 2 乗は複素共役との積  $|c|^2 \equiv a^2 + b^2 = c \cdot c^*$  で与えられる。



問題 1.1 調和振動子の力学エネルギーが振幅の 2 乗に比例することを確かめよ。

問題 1.2 波の強度 (エネルギー流束密度、単位面積・単位時間あたりのエネルギー流) が振幅の 2 乗に比例することを、電磁波や音波などの具体例で確かめよ。

問題 1.3 スリットの幅が狭い場合について、ホイヘンスの原理を用いて、 $I_1(x)$ ,  $I_2(x)$ ,  $I_{12}(x)$  の  $x$  依存性を具体的に計算せよ。ヒント: 2次元の場合、原点から出る同心円状の波の変位は  $e^{i(kr-\omega t)}/\sqrt{r}$  に比例する。但し  $r$  は原点からの距離。

### 1.3 粒子と波

これまでの結果をまとめると、

粒子は、いつも局在した一塊のものとして観測され、複数の途中経路がある場合でも壁での分布はそれぞれの経路からの粒子の分布の和となり、異なる経路の分布の間の干渉はない。

それに対して、

波は、空間的に広がった存在で、その強度は任意の実数値をとることができ、一つの点に到達する途中経路が複数ある場合、その間に干渉がある。

### 1.4 電子の不思議な振る舞い

さて、最初の弾丸実験の機関銃を、電子を発射する電子銃に置き換えた実験をしたとすると、どのようなことが起こるかを説明しよう<sup>6</sup>。

実験を開始する前に、右端の壁にそって電子の検出器をぎっしり並べて置く。電子が入射した検出器は、その瞬間カチッと音を立てるとしよう。

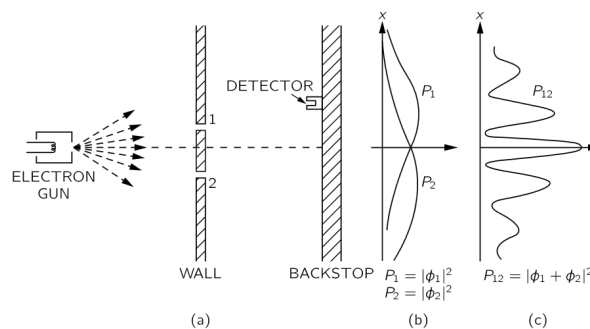


図 1.3: 電子の干渉実験: The Feynman Lectures on Physics III より

<sup>6</sup>この思考実験に相当する実験は 1980 年代に日立製作所の外村彰らによってなされた (YouTube, 日立のサイト, 論文)。

### 1.4.1 電子は粒子として観測される

そのような実験をすると、まず以下のような結果が得られる。

1. カチッという音はいつも同じで、大きかったり小さかったりする  
ことはない。
2. どこにある検出器がカチッという音をたてるか、その場所は不規則  
で確実に予想できない。
3. 2つ以上の検出器が同時になることはない。

以上のような特徴から「電子はいつも一箇所で同じ一つの塊」として観測される、即ち「電子は粒子として観測される」ことが分かる。

### 1.4.2 電子の観測頻度の空間分布は干渉を示す

次に、電子の平均到達頻度の空間変化を測定する。スリット1だけを開けたときの空間変化を  $P_1(x)$ 、スリット2だけの場合を  $P_2(x)$  とし、スリット1と2両方を開けた場合を  $P_{12}(x)$  とすると、機関銃の場合の式(1.1)とは異なり、それぞれのスリットを開けた場合の和に一致しない：

$$P_{12}(x) \neq P_1(x) + P_2(x). \quad (1.11)$$

即ち、波の強度の式(1.3)のように、2つのスリットからの干渉を示す。

### 1.4.3 2つの結果の“矛盾点”

電子のこれら2つの特徴を矛盾なく理解するのは難しい。まず、第一の特徴、

「電子はいつも一箇所で同じ一つの塊として観測される」

ということから、以下のような命題が成り立つことが期待される：

**命題 A：** 2つのスリットが開いている場合、壁に到達した電子は、スリット1かスリット2のどちらか一つを通って来た。

もしこの命題が正しいとすると、以下のような推論ができるはずだ。即ち、壁に到達した電子は、スリット1を通ってきた電子か、スリット2を通ってきた電子の、どちらかに必ず分類できる。前者は  $P_1$  に寄与し、後者は  $P_2$  に寄与するので、

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

が成り立たなければならない。

ところが式(1.11)に示したように、電子の場合にはこれが成り立たないので、**命題 A** は正しくないということが分かる。例えば、2つのスリットの真ん中の後ろ、 $x = 0$  の位置では、

$$P_{12}(0) > P_1(0) + P_2(0) = 2P_1(0)$$

のように、2つの開いたスリットのうち片方を閉じただけで、到達する電子が半分以下になる。また逆に、干渉パタンの節  $x_{\text{node}}$  では、スリット 1 と 2 の両方を開くと、スリット 1 だけが開いた場合よりも到達する電子が減ってしまう：

$$P_{12}(x_{\text{node}}) < P_1(x_{\text{node}}).$$

#### 1.4.4 確率分布が波の干渉パターンと同じ形

このように、両方のスリットが開いた場合の頻度分布  $P_{12}(x)$  が関係式 (1.1) を満たさないことを理解するのは難しい。しかし、この干渉パターン自体は波長がドブロイ波長で与えられる古典的な波の干渉の場合と同じ単純な関数形で表される。すなわち、式 (1.4) および (1.5) のような複素振幅  $\phi_1(x)$  および  $\phi_2(x)$  を仮定して、

$$\phi_1(x)e^{-i\omega t} = |\phi_1(x)|e^{i\theta_1(x)}e^{-i\omega t} \quad (1.12)$$

$$\phi_2(x)e^{-i\omega t} = |\phi_2(x)|e^{i\theta_2(x)}e^{-i\omega t} \quad (1.13)$$

とすると、3つの場合の頻度分布は単純に

$$P_1(x) \propto |\phi_1(x)|^2, \quad P_2(x) \propto |\phi_2(x)|^2, \quad (1.14)$$

および

$$P_{12}(x) \propto |\phi_1(x) + \phi_2(x)|^2 \quad (1.15)$$

で与えられる。ただし今の場合、複素振幅  $\phi(x)$  の絶対値の2乗で与えられるのは、何かの強度ではなく電子が場所  $x$  で見出される平均頻度、或いは確率分布であることに注意しよう。

なぜ電子の検出確率の確率分布関数が、古典的な波の強度を表す式と同様な数式によって与えられるのか、その理由はまったくわからない<sup>7</sup>。

#### 1.4.5 まとめ

これまでの2重スリット実験の結果をまとめると、

1. 電子はいつも一箇所で同じ一塊の粒子として観測される
2. 毎回の実験で電子が検出される場所は予測できず結果は確率的
3. 電子が検出される位置の確率の分布はド・ブロイ波長の波の強度分布と同じ干渉パターン

となる。つまり、

電子は、最後に観測されるときにはいつも「同じ一つの塊」なのに、途中、2つのスリットの「どちらか片方を通った」とは言えない

のである。これは非常に奇妙なことである。つまり、

<sup>7</sup>音波や電磁波の場合には、波の強度がこのような数式で与えられることを、より基本的な物理法則、即ち、ニュートン力学や古典電磁気学を用いて示すことができる。

電子はいつもどこかに居るはずなのに、  
命題 A は間違っている、、、

これは矛盾ではないのか？

## 1.5 電子の監視実験

命題 A が破れているとはどういうことか？何か間違えていないのか？  
より詳しく、電子の途中での振る舞いを観察してみよう。

### 1.5.1 電子を監視する

開いた2つのスリットの背後に光源を置いて、スリットを通り抜けてきた電子を照らす。電子は光を散乱するので、スリット1を通り抜けてくればスリット1の背後からの散乱光が観察される。同様に、電子がスリット2を通り抜けてくればスリット2の背後で光が散乱される。このようにすると、スクリーンに到達した電子がどちらのスリットを通り抜けて来たかが分かるはずだ。

その結果は以下のようなになる。まず、スクリーン上で電子が検出される直前に、散乱光がスリット1かスリット2付近のどちらかで観察される。スリット1と2の両方から同時に光が散乱されることはない。即ち、電子は確かにどちらかの穴を通り抜けてきており、命題 A が正しいように見える。

次に、スリット1で光が散乱されたときの電子の壁での頻度分布を  $P'_1(x)$ 、スリット2で光が散乱されたときの電子の頻度分布を  $P'_2(x)$  としてそのパターンを見てみる。すると、

$$P'_1(x) \approx P_1(x), \quad P'_2(x) \approx P_2(x) \quad (1.16)$$

となる。つまり、スリット1を通り抜けてきた電子のスクリーン上の分布  $P'_1(x)$  は、スリット1だけが開いていた場合の分布  $P_1(x)$  のほぼ等しく、スリット2を通り抜けた電子の分布  $P'_2(x)$  は  $P_2(x)$  に近似的に等しい。

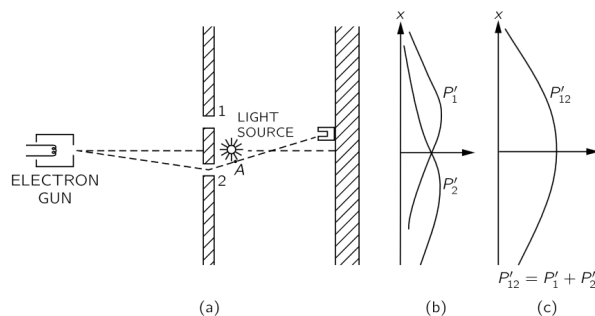


図 1.4: 電子の監視実験 : The Feynman Lectures on Physics III より

今の実験では、スリットは両方とも開いていて、通り抜けてきた電子を2つの場合に分けただけなので、当然

$$P'_{12}(x) = P'_1(x) + P'_2(x)$$

が成り立つ。しかし、これは上の式(1.16)から

$$P'_{12}(x) \approx P_1(x) + P_2(x) \neq P_{12}(x)$$

を意味する。つまり、

経路を監視すると干渉パターンが消える！

電子に光を当てどちらのスリットを通ったか確認すると、実験結果が変わってしまい、干渉パターンが消えてしまったのである！監視によって対象が乱されてしまった。

### 1.5.2 光源を弱くする

そこで、光による電子の攪乱を小さくするために、光源を弱くしてみよう。すると、結果は以下ようになる：

1. スクリーンに電子が到達しているのに、散乱光のフラッシュがまったく観察されない場合が出てくる。
2. スリット1あるいは2付近で散乱光が観察される時は、そのフラッシュの強さは以前と同じ。

2番目の結果は、光の強度を弱くしても、1回ごとの散乱光はいつも同じ塊、即ち光も粒子として観察されるということを意味する。

今度の実験では、スクリーン上に到達した電子を以下の3つの場合に分類できる：

1. スリット1近くでフラッシュが観察された電子
2. スリット2近くでフラッシュが観察された電子
3. フラッシュが観察されなかった電子。

それぞれの作るスクリーン上の分布を  $P''_1(x)$ ,  $P''_2(x)$ ,  $P''_0(x)$  としてみると、それらは

$$P''_1(x) \approx P'_1(x) \approx P_1(x), \quad P''_2(x) \approx P'_2(x) \approx P_2(x), \quad P''_0(x) \approx P_{12}(x)$$

のようになっている！つまり、見られた電子は干渉せず、見られなかった電子は干渉するのだ！

### 1.5.3 光源の波長を長くする

光は光子と呼ばれ粒子として振る舞う。運動量とエネルギーはドブロイの関係式

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad e = h\nu; \quad c = \lambda\nu$$

により与えられる。つまり、波長の長い光子ほど運動量もエネルギーも小さいので、電子の攪乱も小さいのではないか？電子を監視するために長い波長の光を使うとどうなるだろうか？

電子からの散乱光のフラッシュは波長程度の大きさで、波長を長くすれば大きくぼやけてくる。波長を2つのスリットの間隔より長くすると、光が散乱されてもフラッシュの大きさが大きく電子がどちらを通ったか分からなくなる。その場合、光が光った時の分布  $P'_{12}(x)$  が

$$P'_{12}(x) \approx P_{12}(x)$$

となり、干渉パターンが回復する！つまり、光を散乱するが散乱光がぼやけてどちらのスリットを通り抜けたか分からない場合は干渉パターンが生じる。

### 1.5.4 監視実験のまとめ

論理的に

- 電子はどちらか一方のスリットを通った
- 干渉パターンが現れる

の2つは両立しない。監視実験の結果も

- 電子がどちらのスリットを通ったか識別できる実験を行うと、干渉パターンが消え、通常の粒子のように振る舞う。
- 電子がどちらのスリットを通ったか識別できない実験では、干渉パターンが現れる。即ち、電子がどちらかのスリットを通過してきたこと(命題 A)を前提にした推論は正しくない。

となり、論理的には矛盾はない。しかし、

電子はいつも粒子として観測される

にも関わらず、途中の経路を観測しない場合には

「どこか一つの経路を通過してきたはず」というのは間違い

というのは奇妙だ。電子は、見られた時と見られていない時で振る舞いを変えるのか？

## 1.6 確率振幅と確率分布

電子の振る舞いのもう一つの不思議な点、即ち、電子がどの検出器から検出されるかが確率的で予測できない、という点をもう少し詳しく見よう。電子の干渉パターンの解析から、電子が観測される位置  $x$  の確率分布  $P(x)$  は以下のような特徴を持つことが分かった。

ドブロイ波： 干渉パタンの解析から、運動量  $p$  の電子は波長

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

の波、いわゆるドブロイ波として振る舞う事が分かった。ここで  $h$  はプランク定数と呼ばれる定数で

$$h \approx 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

という値を持つ。

確率振幅： ドブロイ波は複素関数  $\phi(x)$  によって表され、電子が検出される位置の確率分布  $P(x)$  は  $\phi(x)$  の絶対値の2乗

$$P(x) = |\phi(x)|^2 \quad (1.17)$$

で与えられる。 $\phi(x)$  のことを確率振幅と呼ぶ。

確率振幅の重ね合わせと干渉： 電子が検出される場所  $x$  に対して、複数の異なる経路が存在する場合は、それぞれの経路に対応して確率振幅  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$  が存在し、全体の確率振幅  $\phi$  はそれらの和

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) + \dots$$

で与えられる。その場合、電子の検出される確率分布は

$$\begin{aligned} P(x) &= |\phi(x)|^2 = |\phi_1(x) + \phi_2(x) + \dots|^2 \\ &= |\phi_1(x)|^2 + |\phi_2(x)|^2 + \dots + 2 \operatorname{Re}[\phi_1(x)\phi_2(x)^*] + \dots \\ &= P_1(x) + P_2(x) + \dots + 2 \operatorname{Re}[\phi_1(x)\phi_2(x)^*] + \dots \end{aligned}$$

で与えられるので、一つ一つの経路の場合の和にならず、異なる経路の間の干渉が生じる。

観測による干渉の破壊： 電子が途中どの経路を通ったかを確認するための測定をすると、経路間の干渉は消え、確率分布はそれぞれの経路を通った場合の確率分布の和

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + \dots$$

で与えられる。

### 1.6.1 神はサイコロを振るのか？

確率分布の干渉パターンは電子の運動量を用いて完全に記述できる。一方、電子の運動量を決めて実験しても、一回一回の実験で電子がスクリーン上のどこに到達するかは、確率的にしか予想できない。これらのことが示唆するのは、

電子の状態を完全に整えて全く同じ実験を繰り返したとしても、実験結果は確率的にしか決まらない

ということだ。そもそも、干渉パタンの出現自体が、実際には電子はどちらかのスリットを通過するはずという、決定論的世界観と矛盾している。

このような電子の干渉実験や、その他の実験結果と理論的考察より、物理学者は次のような結論に達した。

電子のようなミクロなものに対しては、理想的な実験を行ったとしても、観測結果は確定的ではない。

ここで「理想的な実験」と言うのは、

- 初期条件を完全に設定して、
- 観測すべき物理量を曖昧さなく観測し、
- それ以外の攪乱を引き起こさない

というような実験を意味する。

このような結論は、世界に対して我々が持っている常識とはかけ離れていて、理解するのは難しい。特に、電子がスクリーン上で観測される位置を確率的にしか予想できないことをもって、

系の状態を完全に指定しても、電子が到達するスクリーン上の位置は確率的にしか決まらない、

などというのは言い過ぎで、

単に実験が不完全なために毎回結果が異なる

あるいは

理論が不完全なために結果を予測できない

のではないかという疑念が、どうしても生じる。つまり、「状態が完全に指定された」というのは言い過ぎで、実は、運動量とは別に、現在の理論では考慮されていない「隠れた変数」が存在し、それが制御できていないために測定結果が確率的になっているだけという訳だ。そのような主張をもっとも印象的に述べたのが、アインシュタインの

**神はサイコロを振らない。 He does not throw dice.**

という言葉<sup>8</sup>だろう。

しかし今日では、この「隠れた変数の理論」は実験に基づき完全に否定されている。

測定結果を完全に予測するような完全な理論は、絶対に存在しない

---

<sup>8</sup>実際にアインシュタインがこの言葉を言ったかどうかについて、明確な証拠があるわけではないようだ。



ということを、どうやって「実験的に確かめられ得る」のか、そのロジックは非常に興味深い。これは、講義の後半で議論する<sup>9</sup>。

## 1.7 ハイゼンベルグの不確定性原理

上で述べた量子力学の不確定性に関して、ハイゼンベルグは、電子のようなマイクロなものの観測過程を具体的に詳しく検討することによって、その位置と運動量を同時に正確に決定することはできないと主張した。即ち、位置の不確定性  $\Delta x$  とその方向の運動量の不確定性  $\Delta p_x$  の積はプランク定数  $h$  より小さくできない：

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim h, \quad h \approx 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}. \quad (1.18)$$

プランク定数は非常に小さいので、通常のマクロな物体の場合にはどんなに精密な測定でも、測定誤差による不確定性のほうがはるかに大きく、式 (1.18) による原理的不確定性は問題にならない。しかし、電子のように非常に軽いものに対しては、この不確定性の制限が大きな意味を持つ。

ハイゼンベルグは、この観測における位置と運動量の同時決定不可能性を意味する不確定性関係を逆に解釈して、電子のようなマイクロなものは、

粒子の位置と運動量は同時に意味を持ち得ない

と主張した。量子力学はこの意味での不確定性関係を基礎に定式化された。

### 1.7.1 不確定性関係とドブロイの式

ハイゼンベルグによる不確定性関係の導出は具体的観測過程についての若干込み入った議論に基づく。また、量子力学の定式化の過程では多くの試行錯誤や発見的議論、すなわち論理的飛躍のある議論がなされた。ここでは、当時の込み入った議論を再現することはやめ、物質が波の性質を持つということを出発点にして、不確定性関係式 (1.18) を解釈しよう。

いま、確率振幅を表す波の振幅が空間変化し、 $\Delta x$  程度の長さの領域のみで大きな値を持っているとする (図 1.5)。このような波を波束という。

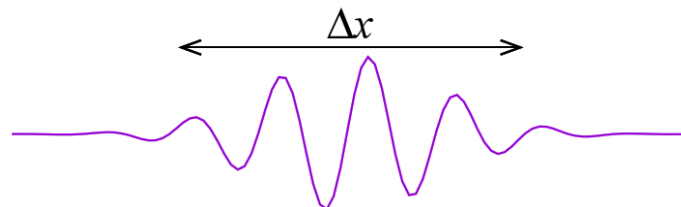


図 1.5: 波束

<sup>9</sup>電子線実験で干渉パターンが出現すること自体、「どんなに完全な理論ができたとしても、電子がどちらのスリットを通過してきたのか決定できない」ことの実験的証拠とみなすべきであろう。

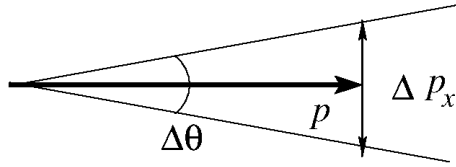


図 1.6:  $\Delta p_x$  と電子の運動量の方向の不確定性  $\Delta\theta$ .

この波束を確率振幅として物体の確率分布を求めると、物体が見いだされる範囲、即ち、位置の不確定性は  $\Delta x$  程度である。

一方、この波束が与えられた時に、波長  $\lambda$  はその領域にある波の数  $n$  をもちいて

$$\lambda \sim \frac{\Delta x}{n}$$

と見積られる。しかし、波形から整数値の波の数を見積ると、端での波の数え方の曖昧さから少なくとも  $\pm 1$  程度の不確定性が生じる。即ち、

$$\Delta n \gtrsim 1$$

なので、波長の逆数の不確定性は

$$\Delta \left( \frac{1}{\lambda} \right) \sim \frac{\Delta n}{\Delta x} \gtrsim \frac{1}{\Delta x}$$

程度になる。一方、ドブロイの関係式

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

より

$$\Delta p = h \Delta \left( \frac{1}{\lambda} \right) \gtrsim h \frac{1}{\Delta x}$$

となり、不確定性関係式 (1.18) が得られる。

### 1.7.2 2重スリット実験の干渉パターンと不確定性関係

2重スリットの干渉実験では、スリット間隔を  $d$  とすると、干渉パターンの最初の節の現れる角度  $\theta_1$  は、

$$d \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{2} \tag{1.19}$$

で与えられる。 $\theta_1 \ll 1$  とすると、これは

$$\theta_1 \approx \frac{\lambda}{2d} \tag{1.20}$$

となる。但し、 $\lambda$  は電子のドブロイ波長で、電子の運動量と

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{1.21}$$

と関係している。

一方、電子がどちらのスリットを通ったか確定できる場合には、位置の不確定性がスリットの間隔より小さい、即ち

$$\Delta x < d$$

でないといけませんが、不確定関係 (1.18) より、この時、運動量の不確定性は

$$\Delta p_x > \frac{h}{d} \quad (1.22)$$

である。これは  $x$  方向 (電子の進行方向に対して垂直方向) の運動量の不確定性なので、ドブロイ波の式 (1.21) を用いると、回折角  $\theta$  の不確定性と

$$\Delta p_x \sim p\Delta\theta = \frac{h}{\lambda}\Delta\theta$$

のように関係する。すると、上の  $\Delta p_x$  の不等式 (1.22) は

$$\Delta\theta > \frac{\lambda}{d} \quad (1.23)$$

を与える。この不確定性は式 (1.20) で与えた節の方向の角度よりも大きい。

干渉パターンが見えると言うことは、例えば  $\theta = 0$  の方向には電子が観測され、 $\theta = \theta_1$  の方向には観測されないということなので、この2つの方向がはっきりと区別されなければならない。一方、角度の不確定性  $\Delta\theta$  は電子の進行方向の不確定性を表すので、その範囲のどちらに電子が飛んでゆくかは分からないということである。言い換えると、本来  $\theta = 0$  の方向に飛んでゆくはずの電子が不確定性のために  $|\theta| < \frac{1}{2}\Delta\theta$  のどの方向に飛んでか分からないということである。つまり、式 (1.23) で与えられる角度の不確定性が式 (1.20) で与えられる節の方向よりも大きいと、干渉パターンがぼやけて見えなくなってしまう。

まとめると、電子がどちらのスリットを通ったか確定できるほどその位置を正確に指定されると、運動量の不確定性が大きくなり、干渉パターンは生じないのである。

## 第2章 量子力学の定式化

この章では、量子力学の定式化を行う。最初に、物質波の従う方程式であるシュレディンガー方程式の“導出”と、その数学的性質について議論する。その後、量子力学で重要な役割を果たすエルミート演算子と、その固有値・固有関数の性質について説明する。その上で、量子力学における物理量とその観測の解釈について説明する。

### 2.1 シュレディンガー方程式

電子線干渉実験の一つの大きな特徴は、どうやって確率分布に干渉が現れうるのか解釈は難しいのに、干渉パタンの構造は通常の古典的な波の干渉パターンと同じ構造をしていることだ。これを手掛かりに、前の章で導入した確率振幅の従うべき方程式について議論する。その際、出発点になるのが、物質波の角振動数を与えるアインシュタインの関係式

$$E = \hbar\omega \quad (2.1)$$

と波数を与えるドブロイの関係式

$$p = \hbar k \quad (2.2)$$

である<sup>1</sup>。

#### 2.1.1 古典的波動方程式

まず、古典的な波動方程式の復習をしておく。典型的な波の振幅は

$$\psi(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t) + B \cos(kx \pm \omega t) \quad (2.3)$$

と表される。ここで、 $k$ と $\omega$ は波数と角振動数と呼ばれ、波長 $\lambda$ と周期 $T$ を用いて

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

と定義される。波の速度 $v$ は波の式

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>プランク定数 $h$ を $2\pi$ で割ったものをディラック定数をいい $\hbar \equiv h/2\pi$ と記す。

で与えられる<sup>2</sup>。音波や電磁波の場合、 $\omega$ は $k$ に比例し、その結果、波の速度 $v$ は振動数に依存せず一定となる。一般には、 $\omega$ が $k$ のより複雑な関数となることもあり、その場合、波の速度は波数あるいは振動数に依存する。このような $\omega$ と $k$ の関係は分散関係式と呼ばれる。

式(2.4)で与えられる波の速度 $v$ が $k$ によらず一定の場合、波の式(2.3)が満たすもっとも簡単な微分方程式は

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \quad (2.5)$$

で、これは波動方程式と呼ばれる。任意の2階微分可能な1変数関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して、

$$\psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (2.6)$$

が波動方程式(2.5)の解になっていることは、容易に確かめられる。

3次元空間における波動方程式は、式(2.5)を拡張して

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \Delta \psi \quad (2.7)$$

となる。ここで、 $\Delta$ は

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

で定義され、ラプラス演算子と呼ばれる。

電磁波が式(2.7)の形の式に従うことは、真空中のマックスウェルの方程式から直ちに導出される。音波が波動方程式に従うことは、古典力学に基づく流体力学の方程式から、ある近似の下に導き出すことができる。

**問題 2.1** 式(2.3)および(2.6)が、波動方程式(2.5)の解になっていることを確かめよ。

**問題 2.2** 式(2.6)の第1項および第2項が、それぞれ右向きおよび左向きに伝播する波を表していることを確かめよ。

### 2.1.2 波の複素数表示

波動方程式(2.5)の解は複素関数を用いて

$$\psi(x, t) = C e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.8)$$

と書くこともできる。

場の量 $\psi$ が電場などの物理量を表す場合は、当然、実数でなければならない。しかし、波動方程式(2.5)は実係数の線形方程式であることから、複素解 $\psi$ が得られればその実部 $\text{Re } \psi$ (或いは虚部 $\text{Im } \psi$ )も同じ方程式を満

<sup>2</sup>この式で与えられるのは波の位相速度である。波束の伝播する速度は群速度と呼ばれ、それは $v_g \equiv d\omega/dk$ で与えられる。

たすので、実際の物理量は複素解の実部（或いは虚部）に対応している  
と考えることができる。実際、式 (2.8) の係数  $C$  が複素数で、偏角  $\theta$  と絶  
対値  $R$  を用いて

$$C = Re^{i\theta}$$

と表される場合には、複素解  $\psi$  の実部が式 (2.3) の形にかけるとは、容  
易に示せる。

**問題 2.3** 複素関数  $\psi$  が波動方程式 (2.5) の解である時、その実部  $\text{Re } \psi$  お  
よび虚部  $\text{Im } \psi$  も式 (2.5) の解であることを示せ。

**問題 2.4** オイラーの公式を用いて三角関数の加法定理を証明せよ。

**問題 2.5**  $C = Re^{i\theta}$  のとき、式 (2.8) の実部が式 (2.3) の形になることを  
示せ。その時、係数  $A$  および  $B$  を  $R$  および  $\theta$  を用いて表せ。ここで、 $R$   
と  $\theta$  は実数とする。

**問題 2.6** 式 (2.8) を波動方程式 (2.5) に代入することにより、波数と角振  
動数との間の分散関係式を導け。

**問題 2.7** 関数

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ce^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.9)$$

は、3次元の波動方程式 (2.7) を満たすことを示せ。但し、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$  お  
よび  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  とする。式 (2.9) のような波を平面波と呼ぶ。

### 2.1.3 (時間に依存する) シュレディンガー方程式

自由粒子のエネルギーは運動量を用いて

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

と表されるので、アインシュタイン・ドブロイの関係式 (2.1) と (2.2) よ  
り、自由粒子の振動数と波数の間には

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.10)$$

の分散関係式が成り立つ。この分散関係を満たす波動関数 (2.8) が解とな  
る、微分方程式を考えよう。波動関数 (2.8) を  $t$  及び  $x$  で微分した時

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\omega\psi, \quad \frac{\partial}{\partial x}\psi = ik\psi$$

となることに注意すると、式 (2.8) で与えられる波動関数  $\psi$  が方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi \quad (2.11)$$

を満たすことは、直ちに確かめられる。右辺の括弧で囲われた微分演算  
子は、運動エネルギーに対応する。

より一般に、ポテンシャル  $V(x)$  中を運動する粒子の場合には、全エネルギーが

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

となることに対応して、エネルギー演算子  $\hat{H}$  を

$$\hat{H} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (2.12)$$

と定義して、波動関数  $\psi(x, t)$  は、式 (2.11) ではなく、方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (2.13)$$

に従うと考えよう。この式 (2.13) を (時間に依存する) シュレディンガー方程式と呼ぶ。エネルギー演算子  $\hat{H}$  はハミルトン演算子、あるいはハミルトニアンとも呼ばれている。

式 (2.13) の左辺に虚数単位の  $i$  があることから分かるように、波動方程式 (2.5) の場合とは異なり、複素解の実部は解ではない。即ち、

シュレディンガー方程式 (2.13) の解  $\psi$  は必ず複素数

である。そのため、古典的な波動方程式とは違って、 $\psi$  そのものを観測量と見なせない。 $\psi$  は波動関数または確率振幅と呼ばれ、電子線の 2 重スリット実験の結果などから

その絶対値の 2 乗  $|\psi(x, t)|^2$  が、粒子を観測したときに見出される位置の分布、すなわち存在確率の分布を与える

と解釈されている。

このような単純な議論に基づき、確率振幅に対する方程式、即ち、シュレディンガー方程式は導き出された。この議論は、物質波の分散関係式がアインシュタイン＝ド・ブロイの関係式 (2.1) と (2.2) を満たすべきとの要請から導かれたものではあるが、音波や電磁波の方程式のように、物理のより基礎的な方程式から導出されたものではない。特に、波動関数の確率解釈に至っては、実験との整合性を取るためにそうしているにすぎず、第 1 章で議論したように、確率の干渉など、その結果を直感的に理解することは困難である。

ところが、例えば水素原子の場合についてシュレディンガー方程式を解いて、その結果をみると、実験で得られる水素原子のスペクトルと完全に対応しているのである！

#### 2.1.4 時間に依存しないシュレディンガー方程式

波動関数  $\psi(x, t)$  は、位置  $x$  と時間  $t$  の 2 変数関数であるが、シュレディンガー方程式 (2.13) には、

$$\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \phi(x) \quad (2.14)$$

という形の、変数  $t$  の関数と変数  $x$  の関数の積で表される、いわゆる変数分離解が存在する。ただし、ここに現れる定数  $E$  と関数  $\phi(x)$  は

$$\hat{H}\phi(x) = E\phi(x) \quad (2.15)$$

を満たさなければならない。これは時間に依存しないシュレディンガー方程式と呼ばれている。

方程式 (2.15) は、数学的には演算子  $\hat{H}$  の固有値方程式と呼ばれる形をしている。演算子  $\hat{H}$  に対して、式 (2.15) を満たす  $E$  と  $\phi(x)$  の組、即ち

$$\hat{H}\phi_n(x) = E_n\phi_n(x); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

を満たす  $(E_n, \phi_n(x))$  を、それぞれ  $\hat{H}$  の固有値、固有関数と呼び、一般に無限組存在する。

ハミルトニアン  $\hat{H}$  の固有値、固有関数の組  $(E_n, \phi_n(x))$  が得られれば、それを用いて時間に依存するシュレディンガー方程式の解

$$\psi(x, t) = e^{-iE_n t/\hbar} \phi_n(x) \quad (2.17)$$

を構成することができる。そのときの粒子の確率分布は

$$|\psi(x, t)|^2 = |e^{-iE_n t/\hbar} \phi_n(x)|^2 = |\phi_n(x)|^2$$

のように時間に依存せず、定常である。つまり、

ハミルトニアン  $\hat{H}$  の固有関数は定常状態を与える。

また、この解の角振動数とアインシュタインの関係式 (2.1) より、定常状態 (2.17) にある系のエネルギーは、固有値  $E_n$  で与えられる。すなわち、

ハミルトニアン  $\hat{H}$  の固有値は、定常状態のエネルギーを与える。

時間に依存するシュレディンガー方程式 (2.13) は線形微分方程式なので、その一般解は式 (2.17) の重ねあわせ、即ち、線形結合

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-iE_n t/\hbar} \phi_n(x) \quad (2.18)$$

で与えられる。複素係数  $c_n$  は積分定数で、初期条件によって決まる。

**問題 2.8** 定数  $E$  と関数  $\phi(x)$  が式 (2.15) を満たすとき、式 (2.14) がシュレディンガー方程式 (2.13) の解になっていることを示せ。同様に、 $(E_n, \phi_n(x))$  が式 (2.16) を満たす時、式 (2.18) が式 (2.13) を満たすことを示せ。

### 2.1.5 波動関数の規格化

シュレディンガー方程式 (2.13) および (2.15) は波動関数に対して線形であるから、その解  $\phi(x)$  あるいは  $\psi(x, t)$  に対して、定数を掛けたものも解である。従って、解の絶対値の 2 乗の積分が収束するとき、即ち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx < \infty \quad (2.19)$$



であれば、それに定数因子（規格化因子）をかけることによっていつも

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (2.20)$$

となるように、その解を規格化できる。規格化可能な関数は、式 (2.19) の無限区間積分が収束しなければならないので

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x, t) = 0 \quad (2.21)$$

である。ある時刻  $t$  で規格化された  $\psi(x, t)$  は別の時刻でも規格化されている<sup>3</sup>。一方、積分 (2.19) が発散する場合には、波動関数は規格化できない。

以下では、波動関数はいつも規格化されているものとする。

**問題 2.9** 波動関数  $\phi(x)$  が規格化されておらず、 $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = C$  ( $C \neq 1$ ) のとき、 $\tilde{\phi}(x) = N\phi(x)$  が規格化されるためには、 $N$  をどう取ればよいか？

### 2.1.6 【付録】変数分離法

時間に依存するシュレディンガー方程式 (2.13) のように、左辺の演算子を変数  $t$  のみに作用し、右辺の演算子を変数  $x$  のみに作用する場合には、

$$\psi(x, t) = f(t) \phi(x) \quad (2.22)$$

の形の変数分離解が存在することが示される。

実際、これを式 (2.13) に代入して、両辺を  $f(t)\phi(x)$  で割ると

$$\frac{1}{f(t)} i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{1}{\phi(x)} \hat{H} \phi(x) \quad (2.23)$$

をえる。2つの独立変数  $x$  と  $t$  のうち、左辺は変数  $t$  のみの関数で、右辺は変数  $x$  のみの関数である。ところが、この式 (2.23) の等号は任意の  $x$  と  $t$  に対して成り立たなければならないので、結局、両辺は  $x$  と  $t$  のどちらにも依存しない定数でなければならない。

その定数の値を  $E$  と置くと、2つの方程式

$$i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t} = E f(t) \quad (2.24)$$

$$\hat{H} \phi(x) = E \phi(x) \quad (2.25)$$

をえる。第2式は  $\hat{H}$  の固有値方程式、即ち、時間に依存しないシュレディンガー方程式 (2.15) である。第1式は直ちに解けて、

$$f(t) = C e^{-iEt/\hbar} \quad (2.26)$$

を得るので、式 (2.22) に代入して

$$\psi(x, t) = C e^{-iEt/\hbar} \phi(x) \quad (2.27)$$

<sup>3</sup>これは、すぐ後で述べるハミルトニアンがエルミートであることから示される。

となる。これは、式 (2.14) と積分定数  $C$  を除いて一致する。

この解法では解の形を変数分離型 (2.22) に限って解いたが、以下に議論する  $\hat{H}$  の固有関数の完全性から、任意の初期条件に対する時間に依存するシュレディンガー方程式の解は、変数分離解 (2.22) の重ね合わせ (2.18) によって与えられることが示される<sup>4</sup>。

## 2.2 ハミルトニアンとその固有値・固有関数

ハミルトニアンとその固有値・固有関数には、以下のような性質がある。

### 2.2.1 ハミルトニアンは線形演算子

ハミルトニアンは波動関数に作用して別の関数を与える演算子である。以下の性質を持つ演算子を線形演算子という：

$$\hat{H}(c\psi) = c(\hat{H}\psi), \quad \hat{H}(\psi_1 + \psi_2) = \hat{H}\psi_1 + \hat{H}\psi_2. \quad (2.28)$$

ただし、 $c$  は任意の複素数とする。これら 2 つの条件を合わせて、

$$\hat{H}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1(\hat{H}\psi_1) + c_2(\hat{H}\psi_2) \quad (2.29)$$

と表すことができる。ハミルトニアンはこの条件を満たす。

**問題 2.10** 線形性の条件 (2.28) と (2.29) が等価であること、すなわち、条件 (2.28) から条件 (2.29) が導かれること、およびその逆を示せ。

**問題 2.11** ハミルトニアン (2.12) が、線形演算子の条件 (2.29) を満たすことを示せ。

### 2.2.2 ハミルトニアンはエルミート演算子

ハミルトニアン (2.12) は規格化可能な任意の波動関数  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^*(x) (\hat{H}\phi_2(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{H}\phi_1(x))^* \phi_2(x) dx \quad (2.30)$$

を満たす。この等式を満たす線形演算子をエルミート演算子という。式 (2.12) で与えられるハミルトニアンはこの条件を満たすので、エルミート演算子である。

**問題 2.12** ハミルトニアン (2.12) が、エルミート演算子の条件 (2.30) を満たすことを示せ。ヒント：規格化可能な波動関数は  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0$  を満たす。これに注意して、部分積分を用いよ。

<sup>4</sup>変数分離解の重ね合わせは変数分離解でないことに注意。

問題 2.13 波動関数  $\psi(x, t)$  が時間に依存するシュレディンガー方程式 (2.13) を満たすとき、積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx$$

が時間に依存しないことを示せ。ヒント：  $\hat{H}$  がエルミート演算子であることを用いて、この積分の時間微分がゼロとなることを示せ。

### 2.2.3 エルミート演算子の固有値は実数

エルミート演算子  $\hat{H}$  の固有値・固有関数の組を  $(E_i, \phi_i(x))$  とすると

$$\hat{H}\phi_i(x) = E_i\phi_i(x)$$

を満たす。また、式 (2.30) より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i^*(x) (\hat{H}\phi_i(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{H}\phi_i(x))^* \phi_i(x) dx$$

が成り立つので、上の式を代入すると

$$E_i \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i^*(x) \phi_i(x) dx = E_i^* \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i^*(x) \phi_i(x) dx \implies E_i = E_i^*$$

を得る。即ち、エルミート演算子の固有値は実数である。

### 2.2.4 異なる固有値に対する固有関数は直交する

2つの関数  $\phi_1(x)$  と  $\phi_2(x)$  の内積を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^*(x) \phi_2(x) dx \tag{2.31}$$

によって定義し、内積がゼロになる2つの関数は直交するという。

いま、演算子  $\hat{H}$  の固有値・固有関数を2組考える：

$$\hat{H}\phi_i(x) = E_i\phi_i(x), \quad \hat{H}\phi_j(x) = E_j\phi_j(x).$$

すると、エルミート演算子の満たす関係式 (2.30)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i^*(x) (\hat{H}\phi_j(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{H}\phi_i(x))^* \phi_j(x) dx$$

より、その固有値  $E_i, E_j$  は実数であることに注意して、

$$(E_i - E_j) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i^*(x) \phi_j(x) dx = 0$$

をえる。これより、 $E_i \neq E_j$  のとき固有関数  $\phi_i(x)$  と  $\phi_j(x)$  は直交することが分かる。規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i^*(x) \phi_i(x) dx = 1$$

と合わせて、任意の  $(i, j)$  の組に対して、固有関数の集合  $\{\phi_i(x)\}$  は規格直交条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i^*(x) \phi_j(x) dx = \delta_{i,j} \quad (2.32)$$

を満たすことが分かる。但し、 $\delta_{i,j}$  はクロネッカーのデルタと呼ばれ、整数  $i, j$  を引数として、

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (2.33)$$

で定義される関数である。

### 2.2.5 ハミルトニアン固有関数は完全系を成す

関数の集合、

$$\phi_i(x), \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.34)$$

を関数系という。任意の関数  $f(x)$  が、その関数系のメンバーの線形結合によって

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) \quad (2.35)$$

と表されるとき、その関数系 (2.34) は完全系をなすという<sup>5</sup>。一般に、ハミルトニアンの全ての固有関数の集まりは完全系をなすと信じられている。このことは、いくつかの具体的  $\hat{H}$  に対して証明することはできるが、任意の  $\hat{H}$  に対して一般に証明されているわけではない<sup>6</sup>。

ハミルトニアンの固有関数の集合が完全系をなすことを認めると、任意の初期条件

$$\psi(x, 0) = f(x)$$

に対してシュレディンガー方程式の解は

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-iE_i t/\hbar} \phi_i(x) \quad (2.36)$$

のように表すことができる。ただし、 $\phi_i(x)$  は固有値方程式 (2.16) を満たすハミルトニアンの固有状態である。規格直交条件 (2.32) を用いると、式 (2.36) の展開係数は

$$c_j = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j^*(x) \psi(x, 0) dx \quad (2.37)$$

で与えられることは容易に示せる。また、 $\psi(x, t)$  が規格化されていれば、展開係数  $c_i$  も規格条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = 1 \quad (2.38)$$

を満たす。

<sup>5</sup> 「任意の」と言う意味は文字通り「任意」ではなく、ある条件を満たす関数の集合を考え、その中で「任意」という意味である。今の場合、例えば規格化可能で区分的に（即ち、有限個の孤立点を除いて）2階微分可能な関数を考える。

<sup>6</sup> 後でも触れるが、ハミルトニアンに限らず物理量を表すエルミート演算子一般についても、その固有関数系は完全系をなすと信じられている。

問題 2.14 式 (2.37) および (2.38) を示せ。

問題 2.15 式 (2.36) および (2.37) が時間に依存するシュレディンガー方程式 (2.13) の初期条件を満たす解になっていることを示せ。

## 2.3 物理量とその観測

古典力学では物理量は、位置や運動量、及びそれらの関数などで表されるが、量子力学では物理量は波動関数に作用するエルミート演算子で表される。例えば既に見たように、運動量  $p_x$  は

$$\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.39)$$

という微分演算子を複素数表示の波の式 (2.8) に作用させることによって得られる<sup>7</sup>。このことから、系の運動量は演算子 (2.39) と波動関数によって与えられるとする。位置を表す演算子  $\hat{x}$  は古典力学的な関数  $x$  と区別がつかないが、波動関数  $\phi(x)$  に  $x$  をかけるという作用をする演算子と見なす：

$$\hat{x} \phi(x) \equiv x \phi(x). \quad (2.40)$$

ハミルトニアンと同様に、物理量を表す演算子もその固有関数系は完全系をなすと信じられており、系の状態を表す波動関数はいつも、物理量の固有関数系で展開できるとする。すなわち、物理量  $\hat{A}$  の固有値・固有関数をそれぞれ  $a_i$  および  $u_i(x)$  とし、

$$\hat{A} u_i(x) = a_i u_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.41)$$

が成り立つとすると、系の状態を表す波動関数  $\psi(x, t)$  は、いつも

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) u_i(x) \quad (2.42)$$

のように展開できる<sup>8</sup>。固有関数系  $\{u_i(x)\}$  が規格直交化されているとすると、規格化された状態  $\psi(x, t)$  の展開係数  $c_i(t)$  は、式 (2.37) および (2.38) と同様の関係式

$$c_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i^*(x) \psi(x, t) dx, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |c_i(t)|^2 = 1 \quad (2.43)$$

を満たす。

問題 2.16 運動量演算子 (2.39) がエルミートである、即ち関係式 (2.30) を満たすことを示せ。

問題 2.17 運動量演算子 (2.39) の固有値・固有関数を求めよ。この固有関数は規格化可能か？

<sup>7</sup> 通常関数と区別するために演算子には  $\hat{A}$  のように  $\hat{\quad}$  (hat) をつけて区別する。

<sup>8</sup> 波動関数  $\psi(x, t)$  の時間依存性は係数  $c_i(t)$  の時間依存性に含める。

### 2.3.1 波動関数と物理量の測定結果

古典力学では物理量は変数で表され、系の状態はそれらで直接記述されているので、ある状態にあるときの物理量の値は理論の中では自明で、特に物理量の観測過程そのものを問題にする必要はなかった。しかし、量子力学では系の状態は波動関数で記述され、物理量はそれに作用する演算子で与えられるので、系がある状態にあるときに物理量を測定したらその結果どうなるのか、別に解釈を与える必要がある。歴史的にはいろいろな解釈が提唱され試行錯誤があった。ここでは天下りのあるが、試行錯誤の末に確立された標準的な解釈、すなわち量子力学のコペンハーゲン解釈をまず示して、それがド・ブロイ波や電子線干渉実験の解釈の一般化になっていることを議論しよう。

物理量  $A$  を表す演算子  $\hat{A}$  の固有値・固有関数が  $(a_i, u_i(x))$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) で、系の状態  $\psi(x)$  がその固有関数によって

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x) \quad (2.44)$$

と展開されるとする。

量子力学のコペンハーゲン解釈：状態  $\psi(x)$  にある系に対して物理量  $A$  を測定すると、結果は確率的で演算子  $\hat{A}$  の固有値  $\{a_i\}$  のいずれかになり、

- $a_i$  となる確率は、 $u_i(x)$  の係数の絶対値の2乗  $|c_i|^2$  で与えられ、
- 測定の結果、系の状態は  $u_i(x)$  に不連続に変化する。

この解釈に従うと、系の状態が  $\hat{A}$  の固有状態  $u_m(x)$  にあるとき、すなわち  $\psi(x) = u_m(x)$  のときには測定結果はいつも  $a_m$  となる。例えば、波の式 (2.8) で表される状態は、運動量演算子 (2.39) の固有値  $\hbar k$  の固有状態なので、この状態にある電子の運動量を観測するといつも運動量  $\hbar k$  が得られ、ド・ブロイの関係式 (2.2) を満たす。

電子線の干渉実験ではスクリーン上の電子の位置を観測しているが、位置の演算子  $\hat{x}$  の固有値  $x_0$  の固有状態は  $\delta(x - x_0)$  で与えられ<sup>9</sup>、 $\psi(x)$  は

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0) \delta(x - x_0) dx_0$$

と表される。固有関数  $\delta(x - x_0)$  の係数は  $\psi(x_0)$  なので、電子がスクリーン上の  $x_0$  に見いだされる確率は  $|\psi(x_0)|^2$  となり、以前の議論と矛盾しない。一旦、電子が  $x_0$  に見いだされた直後に、続けて位置を観測しても同じ場所で観測されなければならないので、電子の状態は  $\delta(x - x_0)$  に変化していなければならない。

このコペンハーゲン解釈は、これまで提唱されてきた量子力学の解釈の中で実験事実と矛盾しない唯一のものである。これに従うと、系の状

<sup>9</sup>この後の2.3.3節参照。

態が規格化された波動関数  $\psi(x)$  で表されるとき、物理量  $\hat{A}$  の測定結果の期待値 (平均値) は

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i |c_i|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) (\hat{A}\psi(x)) dx \quad (2.45)$$

で与えられる。

**問題 2.18** 式 (2.45) の 2 番目の等式を示せ。【ヒント】式 (2.42) において、 $u_i(x)$  はエルミート演算子  $\hat{A}$  の固有関数であること (2.41)、およびエルミート演算子の異なる固有値に属する固有関数が直交すること (2.32) を用いよ。

### 2.3.2 例：運動量

系として  $[0, L]$  の範囲の長さ  $L$  の 1 次元系を考える。数学的取扱いを簡単にするために周期的境界条件を用いる。すると、運動量演算子 (2.39) の固有値・固有関数は、

$$p_n = \frac{2\pi n}{L} \hbar, \quad u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ip_n x / \hbar}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.46)$$

となる<sup>10</sup>。波動関数  $\psi(x)$  の、運動量演算子の固有関数展開は、

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ip_n x / \hbar}; \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L e^{-ip_n x / \hbar} \psi(x) dx \quad (2.47)$$

となり、これは複素フーリエ級数展開にほかならない。

**問題 2.19** 運動量の固有関数系 (2.46) が規格直交化条件 (2.32) を満たすことを示せ。ただし、この場合の積分の範囲は  $(-\infty, \infty)$  ではなく、考えている系の領域  $[0, L]$  とする。

### 2.3.3 例：位置

位置の演算子は、式 (2.40) で定義されるように  $x$  をかけるという作用をする演算子である。ディラックのデルタ関数の性質

$$\hat{x} \delta(x - x_0) = x \delta(x - x_0) = x_0 \delta(x - x_0). \quad (2.48)$$

に注意すると、演算子  $\hat{x}$  の固有値・固有関数は

$$x_0, \quad \delta(x - x_0). \quad (2.49)$$

<sup>10</sup>運動量固有値は連続ではなく離散的な値になっていることに注意。これは、系の大きさを有限にしたためである。

で与えられる、任意の実数  $x_0$  が固有値となりうるということが分かる。ただし、この関数は式 (2.32) のように規格直交化できない。波動関数  $\psi(x)$  の  $\hat{x}$  固有関数による展開は、

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0) \delta(x - x_0) dx_0 \quad (2.50)$$

となる。今の場合、固有値  $x_0$  は連続変数なので、和ではなく積分となった。また、粒子の位置  $\hat{x}$  を測定したときの結果が  $x_0$  となる確率密度、即ち単位長さあたりの確率は、固有関数展開 (2.50) の係数  $\psi(x_0)$  の絶対値の2乗

$$|\psi(x_0)|^2$$

で与えられる。これは、電子線干渉実験の結果の式 (1.17) に対応していることが分かる。

### 2.3.4 物理量の非可換性

演算子で表された量子力学的な物理量の際立った特徴は、それらが波動関数に作用する順序によって結果が異なる、即ち、可換でないということである。例えば位置と運動量の演算子の場合には、

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi(s) = \hat{p}_x\hat{x}\psi(s) + i\hbar\psi(x)$$

である。両辺の  $\psi(x)$  を省略し、このことを、演算子の関係式として

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \equiv \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar \quad (2.51)$$

と表す。この様な関係式を交換関係式と呼ぶ。

**問題 2.20** 交換関係 (2.51) を、位置と運動量演算子の定義に基づき示せ。

## 2.4 線形代数との関係

ここまで、量子力学を定式化するのに、実変数  $x$  の複素数値の状態関数 (波動関数)  $\psi(x)$  と線形演算子  $\hat{A}$  を用いてきた。これらは、それぞれ

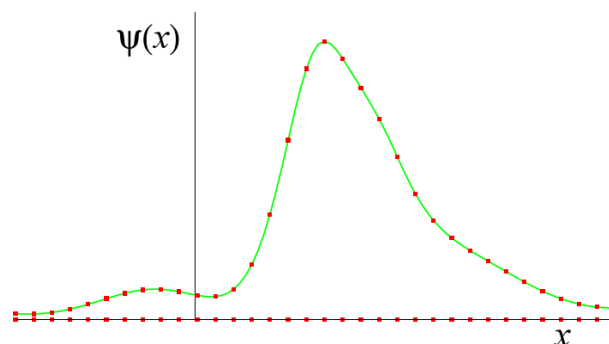


図 2.1: 関数  $\psi(x)$  とベクトル  $\psi$ .



ベクトル  $\psi$  と行列  $A$  と対応づけることができる。即ち、数直線上の等間隔の点  $x_i = i\Delta x$  上での状態関数の値で関数  $\psi(x)$  を表すと、

$$\psi(x) \iff \boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \equiv \sqrt{\Delta x} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_2) \\ \psi(x_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

となり、関数  $\psi(x)$  は無限次元のベクトル  $\boldsymbol{\psi}$  に対応する (図 2.1)。すると 2 つの関数の内積 (2.31) に相当するものは、複素成分のベクトルの内積

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^* \psi(x) dx \approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi(x_i)^* \psi(x_i) \Delta x \iff \boldsymbol{\phi}^* \cdot \boldsymbol{\psi} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_i^* \psi_i \quad (2.53)$$

に対応することが分かる<sup>11</sup>。

関数に作用する線形演算子  $\hat{A}$  は、

$$\phi(x) = \hat{A}\psi(x) \iff \phi_i = \hat{A}\psi \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij} \psi_j \quad (2.54)$$

のように<sup>12</sup>、行列  $A_{ij}$  に対応づけられる。この様な対応を考えると、時間に依存しないシュレディンガー方程式 (2.15) は、

$$E\phi_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H_{ij} \phi_j \quad (2.55)$$

のように、行列  $H_{ij}$  の固有値方程式の形にかける。

行列  $A_{ij}$  の転置複素共役をとった行列をエルミート共役と言い  $A_{ij}^\dagger$  で表す：

$$A_{ij}^\dagger \equiv A_{ji}^* \quad (2.56)$$

式 (2.54) の両辺の複素共役をとった式を、エルミート共役行列  $A_{ij}^\dagger$  を用いて表すと、

$$\phi_i^* = \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij} \psi_j \right)^* = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^* A_{ij}^* = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^* A_{ji}^\dagger \quad (2.57)$$

と書くことができる。

式 (2.30) を満たすエルミート演算子に対応する行列は、行列の成分が

$$H_{ij} = H_{ji}^* = H_{ij}^\dagger \quad (2.58)$$

<sup>11</sup>一般に積とは 2 つのベクトル  $\boldsymbol{x}$  と  $\boldsymbol{y}$  に対して一つの複素数  $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$  を与える写像で、以下の条件を満たすもの：1) 第 1 変数に対する共役線形性： $\langle a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = a^* \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + b^* \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ 、2) 第 2 変数に対する線形性： $\langle \boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z} \rangle = a \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + b \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$ 、3) エルミート対称性： $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^* = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ 、4) 正定値性： $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ 、かつ  $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$  ならば  $\boldsymbol{x} = 0$ 。

<sup>12</sup> $\hat{A}\psi|_{x=x_i}$  は、関数  $\hat{A}\psi$  の  $x = x_i$  における値を意味する。

を満たし、エルミート共役行列がもとの行列と同じとなる。このような行列をエルミート行列という。

**問題 2.21** 式 (2.58) を式 (2.30) との対応関係から導け。

**問題 2.22** エルミート行列の固有値が実数であること、および、エルミート行列の異なる固有値に対する固有ベクトルが直交することを、エルミート演算子の場合に習って示せ。

## 2.4.1 ディラックのブラベクトルとケットベクトル

この様に、波動関数即ち量子状態は無次元の複素成分ベクトルとして表される。それに対する便利な表記として、ディラックはブラベクトル  $\langle\phi|$  とケットベクトル  $|\psi\rangle$  を

$$\langle\phi| = (\cdots, \phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*, \cdots), \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cdot \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

のように導入した (ブラケット表記)。この表記では、内積 (2.53) は

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_i \phi_i^* \psi_i, \quad (2.60)$$

線形演算子の作用 (2.54) およびそのエルミート共役 (2.57) は

$$|\phi\rangle = |\hat{A}\psi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle, \quad \langle\phi| = \langle\hat{A}\psi| = \langle\psi|\hat{A}^\dagger \quad (2.61)$$

と表される。但し、行列  $A_{ij}^\dagger$  に対応する演算子を  $\hat{A}^\dagger$  と表した。

エルミート演算子の条件 (2.30) をブラケット表示で表して見る。左辺は関数  $\phi_1(x)$  と  $\hat{H}\phi_2(x)$  の内積、右辺は関数  $\hat{H}\phi_1(x)$  と  $\phi_2(x)$  の内積なので、そのままブラケット表示すると、

$$\langle\phi_1|\hat{H}\phi_2\rangle = \langle\hat{H}\phi_1|\phi_2\rangle \quad (2.62)$$

となる。左辺のケットベクトルおよび右辺のブラベクトルは、式 (2.61) の関係を用いると、

$$|\hat{H}\phi_2\rangle = \hat{H}|\phi_2\rangle, \quad \langle\hat{H}\phi_1| = \langle\phi_1|\hat{H}^\dagger$$

と表されるので、エルミートの条件 (2.62) は

$$\langle\phi_1|(\hat{H}|\phi_2\rangle) = (\langle\phi_1|\hat{H}^\dagger)|\phi_2\rangle$$

あるいは、

$$\langle\phi_1|\hat{H}|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\hat{H}^\dagger|\phi_2\rangle$$

となる。任意のベクトル  $\langle \phi_1 |$  および  $|\phi_2\rangle$  に対してこれが成り立つということなので、これは

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger \quad \text{或いは} \quad H_{ij} = \left( \hat{H}^\dagger \right)_{ij} = H_{ji}^* \quad (2.63)$$

となり、エルミート行列の条件式 (2.58) を与える。

## 2.5 2つの部分からなる系（複合系）の波動関数

系が、例えば電子と陽子のように、2つの部分からなる複合系を考えよう。電子の座標を  $x$ 、陽子の座標を  $X$  とする。すると、系を記述する波動関数は、 $x$  と  $X$  の2変数の関数

$$\psi(x, X) \quad (2.64)$$

となる。例えば、電子の運動量が  $p$  で、陽子の運動量が  $P$  の場合は、全系の状態は、それぞれの部分系の状態の積

$$e^{ipx/\hbar} e^{iPX/\hbar} \quad (2.65)$$

で表される。実際にこの関数は、電子の運動量演算子  $\hat{p}$  の固有関数で、かつ、陽子の運動量演算子  $\hat{P}$  の固有関数にもなっていることは容易に確かめられる。一般の状態は、この様な単純な積ではなく、いくつかの積の重ね合わせ、即ち、電子の状態を表す  $x$  の関数と陽子の状態を表す  $X$  の関数の積の和

$$\psi(x, X) = \sum_i f_i(x) g_i(X) \quad (2.66)$$

で表される。

**問題 2.23** 式 (2.65) で与えられる状態が、電子の運動量演算子  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  の固有値  $p_x$  の固有関数であることを確かめよ。また、固有値はいくらか。一方、固有関数の和

$$e^{ipx/\hbar} + e^{iPX/\hbar}$$

は、電子の運動量演算子の固有関数でないことを確かめよ。

### 2.5.1 2変数関数の完全系

いま、電子だけの系を表す波動関数の完全系を  $\{u_n(x)\}$ 、陽子だけの系の完全系を  $\{w_m(X)\}$  とする。まず、電子と陽子からなる系の波動関数 (2.64) を、 $x$  の関数とみなすと、完全系  $\{u_n(x)\}$  を用いて

$$\psi(x, X) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(X) u_n(x) \quad (2.67)$$

と展開できる、ただし、係数  $C_n(X)$  は式 (2.37) と同様の式

$$C_n(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x) \psi(x, X) dx \quad (2.68)$$

で与えられるが、今の場合、これは定数ではなく  $X$  の関数である。更に、この  $X$  の関数  $C_n(X)$  は完全系  $\{w_m(X)\}$  を用いて展開できる：

$$C_n(X) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} w_m(X); \quad C_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} w_m^*(X) C_n(X) dX. \quad (2.69)$$

結局、式 (2.67)~(2.69) より、2 変数の波動関数は

$$\psi(x, X) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} u_n(x) w_m(X), \quad (2.70)$$

$$C_{n,m} = \iint_{-\infty}^{\infty} (u_n(x) w_m(X))^* \psi(x, X) dx dX \quad (2.71)$$

のように、電子と陽子の状態関数の 2 つの完全系の積を用いて展開できる。即ち、関数の積の集合  $\{u_n(x) w_m(X)\}$  は  $x$  と  $X$  の 2 変数関数に対して完全系を成し、基底関数系にとることができる。

### 2.5.2 演算子の作用

運動量演算子  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  のように、変数  $x$  だけに作用する演算子  $\hat{A}_x$  が式 (2.66) のような 2 変数関数  $\psi(x, X)$  に作用した結果は

$$\hat{A}_x \psi(x, X) = \sum_i \left( \hat{A}_x f_i(x) \right) g_i(X) \quad (2.72)$$

と与えられる。同様に、変数  $X$  だけに作用する演算子  $\hat{A}_X$  が作用すると

$$\hat{A}_X \psi(x, X) = \sum_i f_i(x) \left( \hat{A}_X g_i(X) \right) \quad (2.73)$$

となる。

### 2.5.3 複合系の状態のベクトル表記

関数をベクトルとみなすと、異なる変数の関数の積はベクトルの直積とみなせ、

$$f(x)g(X) \Leftrightarrow \mathbf{f}_x \otimes \mathbf{g}_X$$

などと表記する。添え字の  $x$  および  $X$  によって、それぞれ関数ベクトルの変数を明示した。ブラケット表示では、2 つの状態ベクトル  $|f\rangle_x$  と  $|g\rangle_X$  の直積は

$$|f\rangle_x |g\rangle_X \quad \text{或いは} \quad |f\rangle_x \otimes |g\rangle_X$$

のように表し、例えば式 (2.66) は

$$|\psi\rangle = \sum_i |f_i\rangle_x |g_i\rangle_X \quad \text{或いは} \quad |\psi\rangle = \sum_i |f_i\rangle_x \otimes |g_i\rangle_X \quad (2.74)$$

のように記す。

2つの2変数関数  $\psi(x, X)$  と  $\phi(x, X)$  の内積は

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x, X)^* \phi(x, X) dx dX \quad (2.75)$$

で定義されるので、例えば  $|f_1\rangle_x |g_1\rangle_X$  と  $|f_2\rangle_x |g_2\rangle_X$  の内積は

$$\left( {}_x\langle f_1 | {}_X\langle g_1 | \right) \left( |f_2\rangle_x |g_2\rangle_X \right) = {}_x\langle f_1 | f_2\rangle_x {}_X\langle g_1 | g_2\rangle_X \quad (2.76)$$

である。

**問題 2.24** 2つのケットベクトルを  $|\psi\rangle = |f_1\rangle_x |g_1\rangle_X + |f_2\rangle_x |g_2\rangle_X$  と  $|\phi\rangle = |f_3\rangle_x |g_3\rangle_X$  としたとき、内積  $\langle\psi|\phi\rangle$  を計算せよ。

# 第3章 量子力学の解釈

## 3.1 コペンハーゲン解釈

量子力学建設の過程で、波動関数の解釈やその時間変化について様々な議論がされたが、実験結果と整合し現在もっとも広く受け入れられている解釈は、2.3.1節で述べた、いわゆるコペンハーゲン解釈と呼ばれているものである。それによると、系を記述する波動関数の時間発展は、

1. シュレディンガー方程式に従う決定論的・連続的時間変化と、
2. 観測に伴う確率的・不連続な変化

の2つからなる。

### 3.1.1 シュレディンガー方程式に従う時間変化

まず、 $t=0$ に $\psi(x,t) = f(x)$ にあった系は、時間に対して一階の微分方程式シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \hat{H} \psi(x,t)$$

に従って時間発展し、一般解は式(2.36)で与えられる。この時間発展は連続で、かつ、初期条件 $\psi(x,0)$ が与えられれば $\{c_i\}$ が決まり、その後の波動関数が一意的に決まるという意味で決定論的である。

### 3.1.2 観測に伴う変化

次に、その系に対して時刻 $t$ に物理量 $\hat{A}$ を測定したとする。測定直前の波動関数が、 $\hat{A}$ の固有関数 $u_n(x)$ で

$$\psi(x,t_-) = \sum_n c_n u_n(x) \quad (3.1)$$

のように表されているとする<sup>1</sup>。その場合、物理量 $\hat{A}$ を測定した結果は一意的ではなく、確率的になる。すなわち、 $u_m(x)$ の固有値 $a_m$ が得られる確率は、波動関数の係数 $c_m$ の絶対値の2乗 $|c_m|^2$ で与えられる。式(2.37)を用いると、これは

$$|c_m|^2 = \left| \int u_m^*(x) \psi(x,t_-) dx \right|^2 \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>  $t_-$  は時刻 $t$ の直前、 $t_+$  は直後を表すとする。

と表される。さらに、測定の結果として値  $a_m$  が得られたとすると、その時の系の状態の物理量  $\hat{A}$  の値は  $a_m$  に決まっているので、同じ物理量を続けて測定しても同じ値が得られなければならない。すなわち、測定によって系の状態は (3.1) から

$$\psi(x, t_+) = u_m(x) \quad (3.3)$$

へ不連続に遷移する。観測過程による波動関数の式 (3.1) から式 (3.3) への確率的・不連続な変化のことを波束の収縮<sup>2</sup>という。

**電子の干渉実験** 1.4節の実験では、電子の波動関数が右の壁に到達したとき存在確率は壁全体に広がっているが、検出器が電子を検出した瞬間に、波動関数は検出器の位置に収縮する。

また、1.5節の電子の監視実験で、スリット付近に光源を置いて電子がどちらのスリットを通るか監視した場合には、どちらかのスリット付近で光がフラッシュした瞬間に、電子の波動関数はフラッシュした位置に収縮する。

**放射性原子の崩壊** 放射性原子は、放射線 ( $\alpha$ 線、 $\beta$ 線、 $\gamma$ 線) を放出して別の原子に崩壊する。そのプロセスは、シュレディンガー方程式に従う時間発展で記述される。元の原子の状態を記述する波動関数を  $\varphi_0$ 、崩壊した状態 (崩壊した原子と放出された放射線) を表す波動関数を  $\varphi_1$  とすると、最初、

$$\psi(0) = \varphi_0$$

だった波動関数が、

$$\psi(t) = c_0(t)\varphi_0 + c_1(t)\varphi_1$$

のように元の原子と崩壊した状態の2つの状態の重ね合わせになり、時間ともに崩壊した状態  $\varphi_1$  の確率振幅  $c_1(t)$  が大きくなってゆく。ガイガーカウンターによって放射線が観測された瞬間  $t_1$  に、状態は

$$\psi(t_1) = \varphi_1$$

と遷移し、波動関数が崩壊状態に収縮する。

## 3.2 2つの物理量の逐次測定

波動関数  $\psi(x)$  で表される系に、2つの物理量  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  を時間を空けずに引き続き逐次測定したとする。演算子  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の固有値・固有ベクトルを、それぞれ

$$\hat{A}u_n(x) = a_n u_n(x), \quad \hat{B}v_n(x) = b_n v_n(x); \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.4)$$

とする。

---

<sup>2</sup>または波束の収束。

### 3.2.1 可換な物理量の場合

まず、演算子  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  が可換、すなわち

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \quad (3.5)$$

の場合を考える。この時、

$\hat{A}$  の固有ベクトルは、同時に  $\hat{B}$  の固有ベクトルとなる  
ことが示せる<sup>3</sup>。即ち、

$$\hat{A}u_n(x) = a_n u_n(x), \quad \hat{B}u_n(x) = b_n u_n(x); \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.6)$$

ととることができる。そこで、系の波動関数が

$$\psi(x) = \sum_n c_n u_n(x) \quad (3.7)$$

のように  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の共通の固有関数で展開されているとする。この状態に、  
まず物理量  $\hat{A}$  を測定すると値  $a_m$  が得られる確率は

$$|c_m|^2 = \left| \int u_m^*(x) \psi(x) dx \right|^2$$

で、その結果、系の状態は

$$\psi(x) = u_m(x)$$

に収縮する。さらにその直後に  $\hat{B}$  を測定すると、確率 1 で  $b_m$  が得られる。  
逆に、状態 (3.7) にまず  $\hat{B}$  を測定して、その直後に  $\hat{A}$  を測定すると、  
確率  $|c_m|^2$  で  $b_m$  が得られ、引き続き確率 1 で  $a_m$  が得られる。

結局、 $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  のどちらを先に測定しても、確率  $|c_m|^2$  で  $a_m$  と  $b_m$  の組  
が得られ、結果は同じである。

### 3.2.2 非可換な物理量の場合

次に位置と運動量 (2.51) のように  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  が非可換

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0 \quad (3.8)$$

の場合を考える。仮に  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の同時固有関数 (3.6) が存在すると、任意  
の関数  $\psi(x)$  に対して、固有関数による展開 (3.7) を用いると

$$\hat{A}\hat{B}\psi(x) = \hat{A}\hat{B} \sum_n c_n u_n(x) = \sum_n a_n b_n c_n u_n(x) = \hat{B}\hat{A}\psi(x)$$

<sup>3</sup>このことは、 $\hat{A}$  の固有値に縮退がない場合、即ち、全ての固有値  $a_n$  が異なる場合  
には、容易に示せる。即ち、 $u_n(x)$  を  $\hat{A}$  の固有値  $a_n$  の固有関数とすると、 $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$   
より、 $\hat{A}\hat{B}u_n(x) = \hat{B}\hat{A}u_n(x) = a_n \hat{B}u_n(x)$  なので、関数  $\hat{B}u_n(x)$  も  $\hat{A}$  の固有値  $a_n$  の固  
有関数であることが分かる。固有値に縮退がないので、 $\hat{B}u_n \propto u_n(x)$  でなければならない。  
即ち  $u_n(x)$  は  $\hat{B}$  の固有関数でもある。縮退があり固有値  $a_n$  に対して複数の  $\hat{A}$  の  
固有関数がある場合には、それらの線形結合を  $\hat{B}$  の固有関数となるように構成できる。



となり、非可換性 (3.8) と矛盾する。即ち、非可換演算子の固有関数は共通にとることは不可能で、式 (3.4) で定義した  $\hat{A}$  の固有関数系  $\{u_n\}$  と  $\hat{B}$  の固有関数系  $\{v_n\}$  とは異なる。

$\hat{A}$  と  $\hat{B}$  が非可換の場合に、任意の状態  $\psi(x)$  に、(i) まず  $\hat{A}$  を測定しその後  $\hat{B}$  を測定した場合と、その逆、即ち (ii) まず  $\hat{B}$  を測定しその後  $\hat{A}$  を測定した場合の結果を比較してみよう。

(i)  $\hat{A}$  を測定してから  $\hat{B}$  を測定する場合： 状態  $\psi(x)$  にまず  $\hat{A}$  を測定すると  $a_m$  が得られる確率は上の場合と同じ

$$\left| \int u_m^*(x) \psi(x) dx \right|^2$$

であるが、測定の結果、収縮した系の状態

$$u_m(x)$$

は  $\hat{B}$  の固有関数ではないので、引き続き  $\hat{B}$  を測定すると、その結果は一意的ではなく値  $b_n$  が得られる確率は

$$\left| \int v_n^*(x) u_m(x) dx \right|^2$$

となる。結局、測定結果として  $(a_m, b_n)$  が得られる確率は

$$\left| \int u_m^*(x) \psi(x) dx \right|^2 \times \left| \int v_n^*(x) u_m(x) dx \right|^2$$

である。

(ii)  $\hat{B}$  を測定してから  $\hat{A}$  を測定する場合： 同様の議論をして、先に  $\hat{B}$  を測定して、次に  $\hat{A}$  を測定した結果、 $(b_n, a_m)$  を得る確率を求めると、

$$\left| \int v_n^*(x) \psi(x) dx \right|^2 \times \left| \int u_m^*(x) v_n(x) dx \right|^2$$

となり、両者は一致しない。すなわち、非可換な演算子に対応する物理量の場合には、測定する順序によって結果が変わることが分かった。

**問題 3.1** 2つの演算子  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  が可換とする。 $\hat{A}$  の固有値に縮退が無い場合、 $\hat{A}$  の固有関数は、同時に  $\hat{B}$  の固有関数になっていることを示せ。注意：固有値がすべて異なる場合、縮退が無いという。

### 3.3 シュレーディンガーの猫

量子力学のコペンハーゲン解釈には我々の直感に反する点があいくつもあって、なかなか受け入れるのが難しい。その一つが、巨視的に異なる2つの状態の重ね合わせ状態と、そのような状態の観測による波束の収縮であろう。

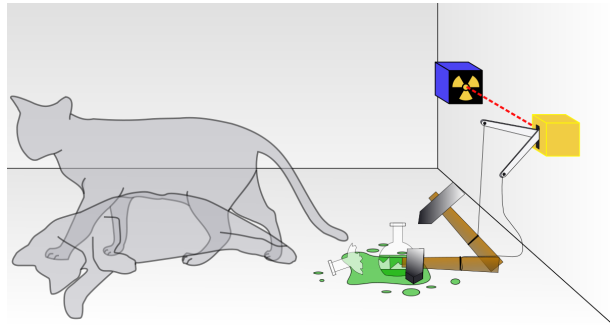


図 3.1: シュレディンガーの猫 : Wikipedia より

例えば、放射性原子が初期状態としては崩壊する前の元の原子  $|\phi_0\rangle$  にあったものが、崩壊して例えばベータ線と別の原子  $|\phi_1\rangle$  になったとしよう。系の記述する状態ベクトル（波動関数）  $|\psi(t)\rangle$  は

$$|\psi(t)\rangle = a(t) |\phi_0\rangle + b(t) |\phi_1\rangle; \quad |a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$$

のように時間発展する。初期時刻  $t = 0$  では

$$a(0) = 1, \quad b(0) = 0$$

で、系は崩壊前の状態  $|\phi_0\rangle$  にある。一方、 $t > 0$  では  $b(t) \neq 0$  となり、原子は崩壊前の状態  $|\phi_0\rangle$  と崩壊後の状態、即ち崩壊後の原子とベータ線  $|\phi_1\rangle$  の重ね合わせの状態になっている。この系に何らかの物理量の観測をして、原子が崩壊前の原子か崩壊後の原子かを確かめたとすると、

- 確率  $|a(t)|^2$  で元の原子が見いだされ、その結果、系の状態ベクトルが  $|\phi_0\rangle$  に収縮するか、
- 確率  $|b(t)|^2$  で崩壊後の原子が見いだされ、その結果、系の状態ベクトルが  $|\phi_1\rangle$  に収縮するか

のどちらかが起こる。つまり、観測前には放射性原子は崩壊しているとも崩壊しているとも決まっておらず、観測の結果、初めてどちらかの状態になる（収縮する）のである。

問題は、これがミクロな世界に限った話ではないことである。つまり、物理の基本原則なので適用範囲はミクロな世界に限らない。マクロな世界にも同様な状況があるはずである。その異様さを強調して見せたのが、シュレディンガーの猫とよばれる以下のような仮想実験である。

【シュレディンガーの猫実験】 外からは中の状況を知ることができない堅牢な箱のなかに、生きた猫と放射性原子、さらに放射線を検出すると毒ガスを放出して猫を殺す装置を入れておく。原子が崩壊すると猫は死ぬ。放射性原子は量子力学の法則に従って崩壊してゆくが、その過程で元の原子の状態と崩壊した状態の重ね合わせの状態になってゆく。

もし、猫を含めた箱の中のものをすべて量子状態として記述できるとすると、初期には崩壊前の放射性原子と生きた猫の積で表される状態

$$|\psi(0)\rangle = |\phi_0\rangle |\phi_{\text{生きた猫}}\rangle$$

だったのが、徐々に、崩壊した原子と放射線を検出した検出器、およびそれにつながれた装置が放出した毒ガスによって殺された死んだ猫の積で表される状態との重ね合わせ状態

$$|\psi(t)\rangle = a(t) |\phi_0\rangle |\phi_{\text{生きた猫}}\rangle + b(t) |\phi_1\rangle |\phi_{\text{死んだ猫}}\rangle$$

になってゆく。しばらくして、箱に取り付けられた窓を開けて中を覗き、猫が生きているか死んでいるかを観測すると、その瞬間に箱の中を記述する波動関数が、生きた猫と死んだ猫の重ね合わせ状態から、

- 確率  $|a(t)|^2$  で生きた猫状態  $|\phi_0\rangle |\phi_{\text{生きた猫}}\rangle$  か
- 確率  $|b(t)|^2$  で死んだ猫状態  $|\phi_1\rangle |\phi_{\text{死んだ猫}}\rangle$

のどちらかに、突然収縮する、、、

そんな変なことがあるのだろうか？

## 第4章 量子相関とその解釈

系の波動関数が物理量の固有状態の重ね合わせ状態にある場合、その物理量を観測した時の結果は確率的にしか予測できない。アインシュタインは、この量子力学の確率的な性格を受け入れず、

「神はサイコロを振らない」

と批判した。しかし、「本当は、結果は観測前に既に決まっているが、情報不足で事前に分からない」のではなく、

「観測するまで結果がどうなるか決まっていない」

というのが、量子力学のコペンハーゲン解釈である。第1章で議論した電子線干渉実験でも、途中の経路を観測していない電子がどちらのスリットを通り抜けたのかは「分からない」のではなく、

「観測していない経路はどちらとも決まっていない」

のである。というのは、確率分布として観測される干渉縞は、「電子はどちらかのスリットを通ったはず」という主張と、明らかに矛盾するからだ。

本章では、アインシュタインによるもう一つの批判、即ち、複合系の絡み合い状態に現れる、量子力学の非局所性に対する哲学的批判を紹介する（EPR論文）。しかし、この非局所性が現実に存在するかどうかを実験で確かめることが可能であることが、ベルによって示され（ベル不等式）、実際にアスペの実験で確認された。

最後に、量子力学の更に奇妙な側面、即ち、実際には起こらなかったことに対するマーミンの考察、「野球原理」を解説する。

### 4.1 光の偏光

量子相関の議論には、粒子の内部状態を用いるのが数学的に簡単である。ここでは、内部状態の例として光子の2つの偏光状態を用いる。まず、古典電磁気学における偏光を復習したのち、その量子力学的記述について説明する。

#### 4.1.1 古典電磁気学における光の偏光

真空中のマックスウェル方程式の平面波解は、2つの独立な直線偏光成分に分解できる。例えば、 $z$ 軸方向に伝わる平面波の場合は、電場が $x$

軸に平行な  $x$  偏光成分

$$\mathbf{E}_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{H}_x = H_0 \sin(kz - \omega t) \mathbf{e}_y \quad (4.1)$$

と、電場が  $y$  軸に平行な  $y$  偏光成分

$$\mathbf{E}_y = E_0 \sin(kz - \omega t) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{H}_y = -H_0 \sin(kz - \omega t) \mathbf{e}_x \quad (4.2)$$

である。ここで、 $\mathbf{e}_x$  および  $\mathbf{e}_y$  はそれぞれ  $x$  軸および  $y$  軸方向の単位ベクトルである。電場と磁場の振幅  $E_0$  と  $H_0$  の比は

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$$

で与えられ、電場と磁場はいつも相伴って伝播するので、光は電磁波と呼ばれる。これら 2 つの偏光成分の一次結合

$$\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_x \cos \theta + \mathbf{E}_y \sin \theta, \quad \mathbf{H}_\theta = \mathbf{H}_x \cos \theta + \mathbf{H}_y \sin \theta \quad (4.3)$$

で表される光を考える。すると、この光の電場および磁場の方向はそれぞれ  $\theta$  および  $\theta + \pi/2$  で、時間的に変わらない。このような光を直線偏光と呼び、その電場の方向を偏光方向と定義する。

光の平面波において、電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{H}$ 、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の向きは互いに垂直で、 $\mathbf{k}$  は波の伝わる向きを表すポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

に平行である。これら三つのベクトル ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ ) は右手系を成す。

理想的な偏光板を通り抜けた光は、電場がある方向を向いた直線偏光となる。通過した光の電場の方向を偏光板の偏光軸の方向と呼ぶ。電場の振幅が  $E_0$  の直線偏光が、伝播方向 ( $\mathbf{k}$  方向) に垂直に置かれた偏光板を透過したとする。入射光の偏光の方向と偏光板の偏光軸の成す角を  $\theta$  とすると、透過光は偏光軸の向きの直線偏光で、その電場の振幅  $E_T$  は

$$E_T = E_0 \cos \theta \quad (4.4)$$

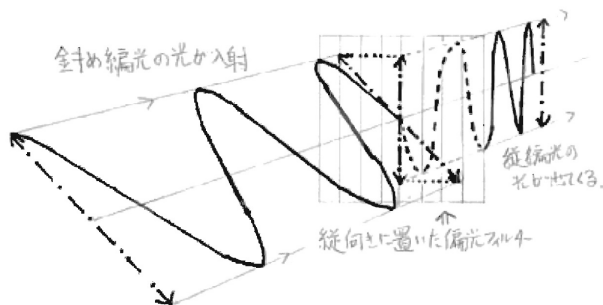


図 4.1: 偏光板を通り抜ける際の電場の振幅の変化。(斎藤吉彦氏のホームページから。http://www.sci-museum.kita.osaka.jp/saito/job/writing/utyu/polarization/polarization.html)

で与えられる (図 4.1)。波の強度、即ち電磁波のエネルギーは振幅の 2 乗に比例するので、透過光の強度  $I_T$  は、入射波の強度  $I_0$  に対して、

$$I_T = I_0 \cos^2 \theta \quad (4.5)$$

である。

**問題 4.1** 2 枚の偏光板を、その偏光軸が互いに垂直となるように重ねると、どんな偏光の入射光も透過しない。その 2 枚の偏光板の間に、もう 1 枚偏光板を挿入したとする。挿入した板の角度  $\theta$  を回転したとき、透過光の強度  $I_T$  は  $\theta$  の関数としてどのように変化するか? ただし、一枚目の板を透過した光の強度は一定とする。3 枚めの板を、間ではなく 2 枚の板の後ろに置くとどうか?

### 4.1.2 量子力学的記述

この現象を量子力学的に記述するとどうなるであろうか? まず、光は古典的な波ではなく光子という粒子として振る舞う。つまり、角振動数  $\omega$  の光は、観測されるときにはいつもエネルギー  $\hbar\omega$  を持った粒として観測される<sup>1</sup>。光子の状態には、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  で表される伝播方向と波長のほかに、内部状態として、偏光が  $\mathbf{k}$  に垂直面内の 2 つの方向を向いた成分に対応して、2 つの独立な状態がある。光子の波動関数は、空間伝播の状態 (運動量) を表す無限次元の関数ベクトル  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  と、内部状態 (偏光) を表す 2 次元ベクトルの直積で表される。波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を  $z$  軸方向とする。すると、内部状態の基底として  $x$  偏光と  $y$  偏光状態を取ることができ、それらを

$$|x\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |y\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

とすると、一般の偏光状態はこれらの一次結合で表される。例えば、 $x$  偏光状態  $|x\rangle$  および  $y$  偏光状態  $|y\rangle$  をそれぞれ  $\theta$  だけ回転した光子の偏光状態  $|x_\theta\rangle$  および  $|y_\theta\rangle$  は

$$|x_\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle \quad (4.7)$$

$$|y_\theta\rangle = -\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle \quad (4.8)$$

と表される (図 4.2)。

### 4.1.3 偏光測定

光子を偏光板に通すことは、その光子の偏光を測定することに対応する。例えば  $x$  軸方向に設定した偏光板の後ろに光子の検出器を置いておくと、内部状態  $|x\rangle$  の光子は偏光板を透過して検出器で検出されるが、 $|y\rangle$

<sup>1</sup> $\omega$  と  $k$  には、もちろん  $\omega = ck$  の関係がある。

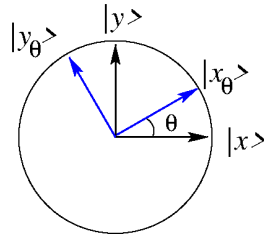


図 4.2:  $x$  および  $y$  偏光と  $x_\theta$  および  $y_\theta$  偏光を表す状態ベクトル。

の光子は偏光板でブロックされて検出されない。 $x$  方向の偏光板と光子検出器を合わせて観測装置として、これで観測される物理量に対する演算子  $\hat{A}_x$  を考える。偏光板付き検出器で、光子が観測される場合を固有値 1、されない場合を固有値  $-1$  とすると、 $\hat{A}_x$  の固有値と固有状態の組は、

$$\hat{A}_x : (1, |x\rangle), (-1, |y\rangle)$$

即ち、

$$\hat{A}_x |x\rangle = 1 |x\rangle, \quad \hat{A}_x |y\rangle = -1 |y\rangle$$

となる。一方、 $y$  軸方向の偏光板と光子検出器の組に対応する物理量  $\hat{A}_y$  の固有値・固有ベクトルは

$$\hat{A}_y : (-1, |x\rangle), (1, |y\rangle)$$

である<sup>2</sup>。

重ね合わせ状態 (4.7) で表される内部状態  $|x_\theta\rangle$  の光子が  $x$  軸方向の偏光板に入射すると、確率  $\cos^2 \theta$  で透過し、透過した光子の内部状態は透過後には  $x$  偏光状態  $|x\rangle$  になる。これらは、4.1.1 節で説明した古典電磁波の場合の、直線偏光が偏光板を通過した際に、強度が (4.5) の偏光板の向きの直線偏光となることに対応している。量子力学では、光は粒子なのでいつも同じエネルギーを持った粒として観測されるが、透過確率が  $\cos^2 \theta$  なので、平均透過エネルギーはやはり式 (4.5) で与えられる。

#### 4.1.4 2 光子系の状態ベクトル

2 つの (区別できる) 光子の内部状態は、それぞれの光子の内部状態を表す状態ベクトルの直積を用いて表される<sup>3</sup>。すなわち、光子 I の  $x$  偏光状態、 $y$  偏光状態、および光子 II の  $x$  偏光状態、 $y$  偏光状態をそれぞれ、

$$|x\rangle_I, |y\rangle_I, |x\rangle_{II}, |y\rangle_{II} \quad (4.9)$$

と表すとすると、2 光子系の内部状態は

$$\begin{aligned} |xx\rangle &\equiv |x\rangle_I |x\rangle_{II}, & |xy\rangle &\equiv |x\rangle_I |y\rangle_{II}, \\ |yx\rangle &\equiv |y\rangle_I |x\rangle_{II}, & |yy\rangle &\equiv |y\rangle_I |y\rangle_{II} \end{aligned} \quad (4.10)$$

<sup>2</sup>即ち、 $\hat{A}_y = -\hat{A}_x$  で、両者は実質的には同じ測定である。

<sup>3</sup>これは 2.5 節で議論した、2 つの部分からなる系の波動関数が、部分系の波動関数の積で表されることに対応している。

の4つを基底とするベクトル空間で表される。例えば、 $|xy\rangle \equiv |x\rangle_{\text{I}}|y\rangle_{\text{II}}$  は光子 I が  $x$  偏光、光子 II が  $y$  偏光の状態を表す。一般の重ね合わせ状態は、これらの基底が張るベクトル空間の規格化されたベクトルで表される。

2光子状態に、一つの光子の偏光測定に対する演算子を作用させるとどうなるだろうか？光子 I に対する偏光演算子を  $\hat{A}_x$  および  $\hat{A}_y$ 、光子 II に対する偏光演算子を  $\hat{B}_x$  および  $\hat{B}_y$  とする。すると、例えば

$$\begin{aligned}\hat{A}_x |xy\rangle &= (\hat{A}_x |x\rangle_{\text{I}}) |y\rangle_{\text{II}} = |x\rangle_{\text{I}} |y\rangle_{\text{II}} = |xy\rangle \\ \hat{B}_x |xy\rangle &= |x\rangle_{\text{I}} (\hat{B}_x |y\rangle_{\text{II}}) = |x\rangle_{\text{I}} (-|y\rangle_{\text{II}}) = -|xy\rangle\end{aligned}$$

のように、それぞれ対応する光子の状態ベクトルにだけ作用する。

## 4.2 2光子絡み合い状態

Ca 原子にある周波数のレーザー光を照射して、ある特定の励起状態に励起すると、基底状態に遷移する際、2つの光子を反対方向に放出し、その内部状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|xx\rangle + |yy\rangle) \quad (4.11)$$

で表される。これは、光子 I と光子 II の両方とも  $x$  偏光の状態と、両方とも  $y$  偏光の状態の重ね合わせ状態である。

式 (4.11) で表される状態のように、全系の状態ベクトルが部分系ごとの状態の直積に因数分解できないような状態を、エンタングル状態、あるいは(量子)絡み合い状態という。一方、例えば内部状態、

$$\frac{1}{2}(|xx\rangle - |xy\rangle + |yx\rangle - |yy\rangle)$$

は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle_{\text{I}} + |y\rangle_{\text{I}}) \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle_{\text{II}} - |y\rangle_{\text{II}})$$

のように、光子 I の状態  $(1/\sqrt{2})(|x\rangle_{\text{I}} + |y\rangle_{\text{I}})$  と光子 II の状態  $(1/\sqrt{2})(|x\rangle_{\text{II}} - |y\rangle_{\text{II}})$  の直積に因数分解できるので、絡み合い状態ではない。

この絡み合い状態 (4.11) は、以下のような際立った性質を持っている。即ち、任意の角度  $\theta$  だけ回転した  $x_\theta$  偏光状態 (4.7) と  $y_\theta$  偏光状態 (4.8) を用いて表わしても

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|xx\rangle + |yy\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_\theta x_\theta\rangle + |y_\theta y_\theta\rangle) \quad (4.12)$$

となり、同じ形になる。このことは、後の議論で用いる。

証明： 式 (4.7) および (4.8) を逆に解くと、

$$|x\rangle = \cos \theta |x_\theta\rangle - \sin \theta |y_\theta\rangle \quad (4.13)$$

$$|y\rangle = \sin \theta |x_\theta\rangle + \cos \theta |y_\theta\rangle \quad (4.14)$$



となる。これを用いて2光子状態を書き換えると、

$$\begin{aligned} |xx\rangle &= (\cos\theta |x_\theta\rangle_I - \sin\theta |y_\theta\rangle_I)(\cos\theta |x_\theta\rangle_{II} - \sin\theta |y_\theta\rangle_{II}) \\ &= \cos^2\theta |x_\theta x_\theta\rangle - \cos\theta \sin\theta (|x_\theta y_\theta\rangle + |x_\theta y_\theta\rangle) + \sin^2\theta |y_\theta y_\theta\rangle \\ |yy\rangle &= \sin^2\theta |x_\theta x_\theta\rangle + \cos\theta \sin\theta (|x_\theta y_\theta\rangle + |x_\theta y_\theta\rangle) + \cos^2\theta |y_\theta y_\theta\rangle \end{aligned}$$

となり、これらを足して式(4.12)を得る。 証明終

### 4.3 2光子偏光実験

Ca原子をある状態に励起すると、偏光状態が式(4.11)で表される2つの光子を反対方向に放出する。図4.3のような装置を用いて、放出された光子の偏光を測定するとどうなるか考察しよう。

**測定装置：** Ca原子の両側に、偏光板と光子検出器からなる2組の装置AとBが置かれている。検出装置には青と赤の2つのランプがついていて、Caが光子を左右に放出したときに、検出器が光子を検出すれば青のランプ(青)が点灯し、検出しなければ赤のランプ(赤)が点灯する。偏光板が無ければ、必ず検出器は光子を検出し(青)が点灯するとする。検出器の前の偏光板をある向きに設定したとき、実験結果はどうなるか、量子力学のコペンハーゲン解釈にしたがって検討してみよう。

**設定(Ax)：** まず、検出器Aの偏光板をx方向に設定して実験を繰り返したとき、どのような結果になるかを考える。状態(4.11)は光子Iに注目すればx偏光とy偏光が同じ確率振幅 $1/\sqrt{2}$ で重ね合わさった状態なので、x方向の偏光板を通り抜ける確率は1/2で、通り抜けない確率も1/2になる。一回ごとの実験でどちらになるかは予測できず、検出器Aで点灯するランプは例えば

A (x偏光): 青青赤青赤青青赤青赤青赤青青青青赤青青赤...

のような青と赤が同じ確率で現れる全くランダムな並びになるはずである。

**設定(By)：** 次に、検出器Bの偏光板をy方向に設定し実験をする。状態(4.11)は光子IIに注目してもx偏光とy偏光が同じ確率振幅 $1/\sqrt{2}$ で重ね合わさった状態なので、やはり上と同様、検出器Bの結果は青と赤が1/2ずつのランダムな並びで、例えば

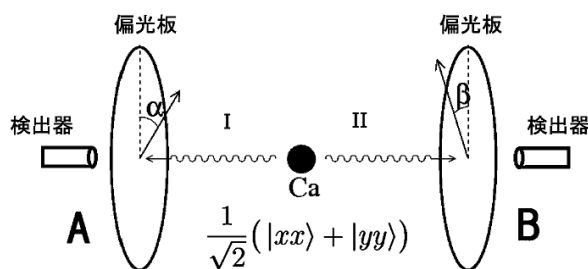


図 4.3: 2光子の偏光測定実験

B ( $y$  偏光): 赤青青赤青青青青赤赤赤青赤青青青青...

のようになる。2つの実験が別の場合には、この2つの結果は何ら関連の無い2つのランダムな記号の並びである。

設定 ( $Ax By$ ): ところが、上と同じ設定で一回ごとの実験のAとBの結果を比べてみるとどうなっているだろうか? 今、検出器Aの方がCa原子に近く、光子Iが光子IIよりも先に偏光版に到達するとしよう。コペンハーゲン解釈によると、検出器Aが光子Iを検出して青が点灯した瞬間に、2光子の状態を記述する状態ベクトルは式(4.11)の第1項

$$|xx\rangle$$

に収縮する。すると、右へ放射された光子IIも  $x$  偏光となり、その後、光子IIは検出器Bの前の  $y$  方向の偏光版にブロックされるので、検出器Bでは光子は検出されずに赤が点灯する。

逆に、検出器Aで赤が点灯した場合は、状態は

$$|yy\rangle$$

に遷移し光子IIは  $y$  偏光となるので、検出器Bの前の偏光版を通り抜け青が点灯する。と言うわけで、毎回の実験についてAとBの結果を並べて書いたとすると、例えば

$$\begin{aligned} A (x \text{ 偏光}): & \text{青赤赤青赤青青赤青赤青青赤青青赤青青赤} \dots \\ B (y \text{ 偏光}): & \text{赤青青赤青赤赤青赤赤青赤赤青赤赤赤青赤赤青} \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

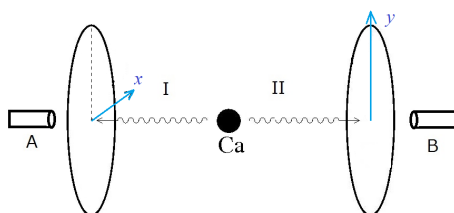
のように、2つの結果は必ず逆になる。AまたはB、どちらか一方の結果だけを見ている限りは、全くのランダムな並びなのにもかかわらず。

設定 ( $Ax Bx$ ): 偏光版の設定をどちらも  $x$  方向にしたとすると、結果はどうなるであろうか? 今度は偏光版の向きが同じなので、同様の考察から、AとBの結果はいつも同じで、例えば

$$\begin{aligned} A (x \text{ 偏光}): & \text{青赤青青赤青青赤青赤青青赤青青赤青青赤} \dots \\ B (x \text{ 偏光}): & \text{青赤青青赤青青赤青赤青青赤青青赤青青赤} \dots \end{aligned}$$

のようになるはずである。前と同様、AとBの出力を別々に見ている限りは全くのランダムなのに、今度は2つを並べると必ず同じになる。

AとBの測定結果に相関があることから、一つの原子から放出された光子IとIIの性質には、何らかの関係があることがわかる。相関があるこ



と自体は不思議ではないし、量子力学特有のものでもない。例えば、何らかの保存則のために Ca から放出される 2 つの光子はいつも同じ偏光方向でなければならないのであれば、こうなるのは当然である。しかし、量子力学の絡み合い状態に対する観測過程のコペンハーゲン解釈には、以下に見るように非常に奇妙なところがある。それを鋭くついたのが次節で説明する EPR 論文である。

## 4.4 EPR の量子力学批判

アインシュタイン、ポドルフスキー、ローゼンは、3 人の名前の頭文字をとって **EPR 論文** と呼ばれる有名な論文で、

「量子力学による物理現象の記述は完全ではありえない」

と批判した<sup>4</sup>。それは、式 (4.11) のような絡み合い状態にある、空間的に離れた 2 つの粒子の観測についての、量子力学のコペンハーゲン解釈の概念的 analysis に基づく。彼らの議論は以下のようなものだ。

前節で説明したように、空間的に遠く離れた 2 つの検出器 A と B によって、光子 I と II の偏光を測定したとする。2 つの光子は一つの原子から放出され、その結果、内部状態が絡み合い状態 (4.11) にあるが、検出器に到達した時には互いに遠くはなれているために、2 光子間に物理的な相互作用はなくなっているとする。それでも、一方の光子の観測結果に従って、他方の光子の状態にも波束の収縮が生じる。

その結果、それぞれの光子に前節で議論したような測定をすると、検出器 A と検出器 B の結果には強い相関が現れる。この様な測定結果の相関自体は、2 つの光子が何らかの相関を持っていることの反映で、量子力学に特有なものではなく、不可解さはない。量子力学による記述が奇妙なのは、以下で議論するように、

光子 I を測定する 検出器 A の設定が、  
別の場所にある光子 II の状態を決める

ことである。アインシュタインたちが批判したのは、そのような意味で

量子力学による自然の記述が、  
物理的対象の局所的実在性を否定している

点である。

### 4.4.1 光子 II の偏光の実在性

検出器 B は検出器 A よりも光源の原子から遠くに置かれており、光子 I が検出器 A に到達した時には、光子 II はまだ検出器 B には到達していないとする。

<sup>4</sup>A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47** (1935) 777–780. “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” (日本語訳)

いま、検出器 A の前の偏光板を  $x$  方向に設定して検出器 A が光子 I を検出した (青) とする。その瞬間には光子 II はまだ検出器 B には到達していないが、光子 I が偏光板を通り抜けた時に状態は  $|xx\rangle$  に収縮し、光子 II は  $x$  偏光になる。その結果、その後光子 II が検出器 B に到達したときに、もし検出器 B の偏光板も  $x$  方向に設定されていれば光子 II は必ず検出される (青) し、逆に検出器 B の偏光板は  $y$  方向に設定されていれば光子 II は検出器 B には到達できない (赤)。より一般に、測定器 B の偏光板が任意の角度  $\theta$  に設定されていれば、光子 II を検出する確率は  $|\cos\theta|^2$  となる。つまり、

光子 II は、実際に  $x$  偏光を持つ光子として振るまう。

のである。その意味で、偏光という光子 II の性質は、実際の測定によって確かめられる物理的実在<sup>5</sup>である。

#### 4.4.2 光子 II の偏光状態の非局所性

Ca から放出後の 2 つの光子は遠く離れていて、物理的な相互作用はないとした。それでも、量子力学ではそれらをそれぞれ別に記述できる独立の存在としては扱わない。即ち、光子 II の偏光は、光子 I の偏光が測定器 A で測定され波束の収縮が起こって初めて確定するのであって、測定器 A の結果が出るまでは重ね合わせ状態 (4.11) にあり、光子 II は偏光の決まった状態にはない。偏光板の向きを  $x$  方向に設定した測定器 A で光子 I が観測されて初めて光子 II の状態は  $x$  偏光になる。

更に奇妙なことに、状態 (4.11) は式 (4.12) と表されるので、もし、検出器 A の偏光板を  $x_\theta$  方向に設定して光子 I が観測されれば、光子 II の状態は  $x_\theta$  偏光になる。つまり、

光子 II の状態が、光子 II の観測とは関係のない測定器 A の偏光板をどの向きに設定するかに依存する

ということだ。光子 II の偏光状態は遠く離れた装置の設定に依存するので、局所的なものともみなせない！

#### 4.4.3 量子力学の記述の不完全性

物理現象に関する我々の認識は、当然、観測対象とそれと物理的に関係しているものについての理解に基づく。それにもかかわらず、この系の量子力学的記述は、光子 II の偏光という光子 II に固有の局所的性質が、それから遠く離れた光子 I を観測する測定器 A の設定に依存するかのようだ。つまり、絡み合い状態の量子力学のコペンハーゲン解釈は、素朴な局所実在論とは相容れない。

---

<sup>5</sup>「実在」とは「実際に存在するもの」という意味で、それを認識する人の主観に左右されない客観的な存在であることを強調した表現。

系の局所的な性質が、それから遠く離れて物理的に関連のない場所で起こっていることに依存するような量子力学の記述は、物理の理論として完全ではありえない<sup>6</sup>

というのが EPR の批判である。

#### 4.4.4 隠れた変数理論

確かに、「光子 II の偏光が遠く離れた検出器 A の設定に依存する」という量子力学の非局性は、我々の素朴な自然認識からは全く理解しがたい。素直に考えれば、

「測定の前には光子の偏光は決まっておらず、測定によってはじめて偏光が確率的に確定する」かのように見えるのは、量子力学が不完全なためだ。実際には、測定器 A で光子 I を測定する前から 2 つの光子の状態はすでに決まっており、どのような測定をすればどのような結果になるのかも確定しているのに違いない。ただ、光子の状態を決める変数の中に未知の隠れた変数があり、実験の際にそれをコントロールできないために、結果がランダムに見えてしまうのだろう。

とする方が、よほど謙虚で合理的に見える。未知の変数を含んだ空想上の完全な理論を隠れた変数理論という。EPR の批判は、

「隠れた変数があるはずだ」

という主張とすることができる。

#### 4.4.5 量子状態の非局所性と情報伝達

上で議論したように、光子 I の観測によって収縮する光子 II の状態は、検出器 A の設定（偏光板の向き）に依存している。波束の収縮は距離に関わらず瞬時に起こるので、これを使えば、「遠く離れた場所に光より速く情報を伝えられるのではないのか」という疑問が生じる。即ち、

検出器 B による光子 II の測定結果から  
検出器 A の設定が分かるのではないか？

と言うわけだ。もしそんなことができれば、検出器 A の設定とアルファベットを対応させて、A から B へ自由に情報を伝えられる。A と B がどんなに離れていても超光速瞬時通信が可能だ！

しかし残念ながら、量子力学に基づく計算からそれは不可能であることが分かる。即ち、検出器 A の偏光板をどのように設定しても、

- A での測定の結果、 $|x_\theta x_\theta\rangle$  あるいは  $|y_\theta y_\theta\rangle$  のどちらに波束が収縮するかは分からない。

<sup>6</sup>これは、「量子力学は間違っている」という批判ではないことに注意。

- 両方の場合を考えると、検出器 B の結果が青（または赤）となる確率は、A の偏光板の設定角  $\theta$  に依らず、いつも  $1/2$  である。

ことを、具体的計算によって示すことができる。即ち、検出器 B の測定結果の統計分布は検出器 A の設定角度によらない。つまり、検出器 A の結果を知らずに検出器 B の測定結果だけをどんなに詳しく解析しても、検出器 A の偏光板の設定角度  $\theta$  を知ることはできない。量子力学は、検出器 A と B の両方の結果を比べたとき、その間に相関が存在するということを導くだけで、片方の結果だけを見ても他方の測定器の設定を知ることはできないように、うまくできている。つまり、

波動関数とその解釈には非局所性があるが、それぞれの測定器による観測結果の局所性は保証されている。

その結果、波動関数の非局所性を用いた情報伝達は不可能なのである。

それぞれの観測結果に局所性があるのなら、なおさら、隠れた変数が存在しても良いような気がしてくるではないか。しかし、それが不可能なことがベル不等式によって示された。

**問題 4.2** 検出器 B の結果から検出器 A の設定を知ることはできないことを示せ。ヒント：検出器 A の偏光板を  $\theta$  方向、検出器 B の偏光板を  $\phi$  方向に設定したとする。検出器 B の観測結果の確率分布は  $\theta$  に依らないことを確かめよ。

**問題 4.3** 検出器 A の結果を毎回知ることができれば、検出器 B の設定とその結果から検出器 A の設定を知ることはできるか？検出器 A の設定を変えずに何度も実験を繰り返すことができるとして考察せよ。これは超光速通信に使えるか？

## 4.5 ベル不等式

EPR の哲学的批判にもかかわらず、自然の記述としては量子力学は大成功をおさめ、少なくとも量子力学と矛盾する実験事実はこれまで見つかっていない。しかし、観測に伴う確率振幅（量子状態）の収縮は謎めいているし、

「確率的に見えるのは理論が不完全であるからに過ぎない。  
きっと、未知の隠れた変数が存在するはず」

という疑念を払拭するのは容易ではない。

ところがこの疑念を完全に払拭してしまったのが、ベル不等式の発見と、その不等式が実際に破れていることを示すアスぺの実験であった。1964 年にベルは、(局所的な) 隠れた変数が存在すれば、必ず満たさなければならない不等式を発見し、量子力学はその不等式を破っていることを示した<sup>7</sup>。即ち、アインシュタインが期待したような、

<sup>7</sup>J.S. Bell, Physics 1 (1964) 195–200. “On the Einstein Podolsky Rosen paradox” (日本語訳)

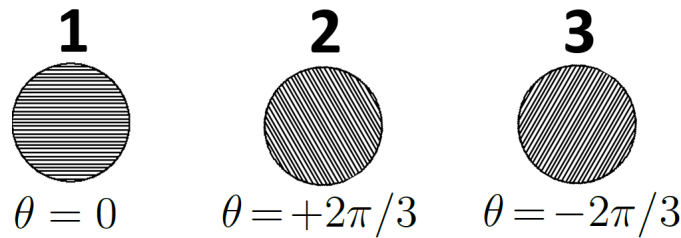


図 4.4: 偏光板の3つの設定

「量子力学と両立する隠れた変数の理論はありえない」

ということが実験的に確認された。この節では、ベル不等式がどういうものかを説明する。

#### 4.5.1 2方向の偏光板設定の2光子実験の解釈

前節で説明したような2光子実験は、光子IIの状態を検出器Aの設定が決めているという意味での量子力学の解釈の奇妙さはあるが、例えば(4.15)のような光子Iの $x$ 偏光と光子IIの $y$ 偏光の相関自体は奇妙なものではない。つまり、何らかの保存則により、「Caから放出される2つの光子はいつも同じ方向の偏光を持っていなければならない」ということを示すだけだ。未知の隠れた変数の値がわからないために、どちらの偏光の光子が放出されるかが予想できないだけだと思ってもよい。

光子Iが観測されるまで光子の偏光が分からないだけで、コペンハーゲン解釈のように、決まっていないとする理由など無いではないか、

という訳だ。

#### 4.5.2 3方向の偏光板設定のある2光子実験

ところが、偏光板の設定を3方向に拡張しただけで事態は一変する。「事前に分らないだけで、光子の状態は観測前から決まっている」という解釈では絶対に説明できない実験結果を量子力学は予言するのである。

まずその準備として、前と同様の2光子偏光測定実験で、偏光板の設定を以下の3方向から任意に選んで行なったらどうなるか考える(図4.4<sup>8</sup>):

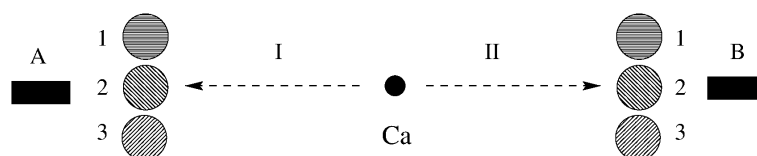


図 4.5: 偏光板の設定が3種類ある場合の実験。

<sup>8</sup>この図では、偏光板の中に平行線でその方向の光の偏光成分が透過することをイ

- 設定 1.  $\theta = 0$  :  $x$  軸方向  
 設定 2.  $\theta = +2\pi/3$  :  $x$  軸から +120 度方向  
 設定 3.  $\theta = -2\pi/3$  :  $x$  軸から -120 度方向

AB で同じ設定の場合： まず、検出器 A と B の偏光板を、例えば A も設定 2、B も設定 2（以下では (A2 B2) と記す）のように、同じ向きに設定しておくとうなるか？ 同じ設定は (A1 B1), (A2 B2), (A3 B3) の 3 通りあるが、どれでも p.49 で議論した設定 ( $Ax Bx$ ) と同じ議論が成り立つ。つまり、繰り返し実験をした結果は確率 1/2 の赤と青のランダムな並びになるが、毎回の結果は A と B でいつも一致する：

$$\begin{aligned} \text{A と B の結果が同じ確率} &: 1 \\ \text{A と B の結果が異なる確率} &: 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

AB で異なる設定の場合： それに対して、偏光板を、例えば (A1 B2) のように、角度  $2\pi/3$  だけ異なる方向に設定するとどうなるであろうか？ A あるいは B の一方だけの結果を見れば、この場合も確率 1/2 で青か赤になるのは、上の場合と同じである。

では、A と B の結果を比較して見るとどうなるか。設定を (A1 B2) として、A の結果が青の場合と赤の場合に分けて考えよう。

A の結果が青の場合： 偏光板 A は  $x$  方向で、それを通り抜ける光子 I は  $x$  偏光状態  $|x\rangle_I$  である。A の測定結果が青ということは、2 光子状態は測定前の状態 (4.11) が  $|xx\rangle$  に収縮したということを意味する。その結果、光子 II も  $x$  偏光状態  $|x\rangle_{II}$  となる。これを、偏光板 B と平行の偏光状態  $|x_{2\pi/3}\rangle_{II}$  と直交する偏光状態  $|y_{2\pi/3}\rangle_{II}$  で表すと、式 (4.13) で  $\theta = 2\pi/3$  を代入して

$$|x\rangle_{II} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) |x_{2\pi/3}\rangle_{II} - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) |y_{2\pi/3}\rangle_{II}$$

となる。この光子 II に対して測定器 B で +120 度方向の偏光測定をすると、測定結果は、

$$\begin{aligned} \text{青 } (|x_{2\pi/3}\rangle_{II}) \text{ の確率} &: \left| \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right|^2 = \frac{1}{4} \\ \text{赤 } (|y_{2\pi/3}\rangle_{II}) \text{ の確率} &: \left| \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right|^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。

A の結果が赤の場合： この場合、系は状態  $|yy\rangle$  に収縮したので、光子 II の偏光状態は  $|y\rangle_{II}$  となる。上と同様に式 (4.14) から、この状態は

$$|y\rangle_{II} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) |x_{2\pi/3}\rangle_{II} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) |y_{2\pi/3}\rangle_{II}$$

---

メージした。しかし、ワイヤグリッド偏光板では、導体のワイヤグリッドに平行の振動電場の光が反射し、直交する電場の光の成分が透過する。すなわち、ワイヤグリッドはこの図の平行線に直交している。



ABの偏光板の設定	ABの結果が同じ確率	ABの結果が異なる確率
同じ	1	0
異なる	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

表 4.1: 偏光板の設定が3方向ある場合の2光子実験の結果の相関

と表されるので、測定器Bの結果は、

$$\begin{aligned} \text{青 } (|x_{2\pi/3}\rangle_{\text{II}}) \text{ の確率: } & \left| \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right|^2 = \frac{3}{4} \\ \text{赤 } (|y_{2\pi/3}\rangle_{\text{II}}) \text{ の確率: } & \left| \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right|^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

これらの結果からAとBの結果の相関を計算すると、AとBで設定が異なる場合、

$$\text{AとBの結果が同じ確率: } \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (4.17)$$

$$\text{AとBの結果が異なる確率: } \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

となる。異なる設定の偏光板の相対角度はどの組み合わせでも $2\pi/3$ なので、設定(A1B2)に限らず、測定器AとBの偏光板の設定が異なる場合には、いつでも結果は(4.17)で与えられる(表4.1)。

偏光板をランダムに設定した場合： 偏光板の設定を、上の3つの中からランダムに選んで、測定毎に変えたとする。その場合、偏光板の設定がAとBで同じになる確率は $1/3$ 、異なる設定になる確率は $2/3$ である。既に考察したそれぞれの場合の実験結果から、ランダム設定の場合には

$$\text{AとBの結果が同じ確率: } \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (4.18)$$

$$\text{AとBの結果が異なる確率: } \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

となり、どちらも同じ確率 $1/2$ である。

これはいかにも凡庸な結果で、我々の世界観の変更を迫るものには到底見えないかも知れない。しかし、以下に見るように、結果(4.18)はEPR論文が指摘した量子力学の驚くべき性質を、最も端的に示していることが分かる。つまり、光子の状態がCa原子から放出された時、即ち、観測前にすでに決まっているとすると、この結果は絶対に説明がつかないのだ!

**問題 4.4** 偏光板の設定が(A1B2)の時、上の計算を用いて、測定器Aの結果が青および赤それぞれの場合に、測定器Bが青を示す確率を求めよ。これより、測定器Aの結果にかかわらず、測定器Bが青となる確率を求めよ。この結果は、式(4.12)から簡単に理解できるか？

### 4.5.3 隠れた変数理論から導かれる不等式 – ベル不等式

上で議論した、量子絡み合い状態 (4.11) の 2 光子偏光実験に対する量子力学のコペンハーゲン解釈は、

- 2つの光子が Ca 原子から放出されたとき、状態は式 (4.11) で表され各光子の偏光は決まっていない。
- 光子 I または II のどちらかが検出器に達してその偏光が観測された瞬間に、確率的に状態の収縮が起こり、その時に初めて両方の光子の偏光が決まる。

と言うものである。それに対して、実験結果を完全に指定する隠れた変数  $X$  が仮に存在するとすれば、どうなるであろうか？

光子の内部状態を表す隠れた変数： 光子が 1 ~ 3 の偏光板設定の検出装置に入ったとき、それぞれどのような結果になるかは、その光子の未知の状態変数（隠れた変数） $X$  で決まっているとす。状態変数  $X$  の値は光子が原子から放出された時に既に決まっているが、それが分からずコントロールできないために、実験結果が確率的になっているとしよう。

光子の振る舞いは、3つの偏光板の設定に対してそれぞれ透過 (青) および不透過 (赤) の2つがあるので、観測前から光子の振る舞いが決まっているとすると、少なくとも  $2^3 = 8$  種類の内部状態がなければならない。逆に、この実験を記述するには8種類の分類で十分である。それらを区別するのが隠れた変数  $X$  なので、その値として1~8を割り当て、3つの偏光板設定に対する測定結果をそのまま順に並べたものと対応させよう (表 4.2)。例えば、隠れた変数  $X = 3$  (青赤青) の光子は、偏光板が 1 に設定されているときに青、2 のときに赤、3 のときに青を与えるとする。

隠れた変数理論： それぞれの光子が測定された時にどんな結果になるかは、Ca 原子を飛び出した時に既に光子の隠れた変数  $X$  の値で決まっている。測定結果が予測できないのは、毎回の実験で飛んでくる光子の  $X$  の値が分からないからである。しかし、それぞれの設定の下での実験結果は式 (4.16) ~ (4.18) の確率で与えられているので、これらから Ca 原子から飛んでくる光子の隠れた変数  $X$  の確率分布を、推定できるはずである。

隠れた変数 $X$	1	2	3	4	5	6	7	8
対応	青青青	青青赤	青赤青	青赤赤	赤青青	赤青赤	赤赤青	赤赤赤
設定 1	青	青	青	青	赤	赤	赤	赤
設定 2	青	青	赤	赤	青	青	赤	赤
設定 3	青	赤	青	赤	青	赤	青	赤

表 4.2: 光子の内部状態を表す隠れた変数  $X$  と、その光子のそれぞれの偏光設定に対する測定結果。

ベル不等式： ところが驚くべきことに、ベルは、

隠れた変数  $X$  の確率分布がどんなものであっても、結果 (4.16)

と結果 (4.18) の両方を実現することは不可能である

ということを、極めて簡単な議論で示した！

これを以下に説明する。まず、結果 (4.16) は、偏光設定が同じなら検出器 A と B の結果は必ず同じになるということなので、光子 I と光子 II の  $X$  の値はいつも同じでなければならない。その条件の下で、結果 (4.18) を満たすことができるかどうかを検討する。具体的には、

検出器 A と B の結果が異なる確率  $P_d$

を、ランダム設定の場合に検討する。

仮に、光子対の隠れた変数の値がどちらも  $X = 2$  (青青赤) であったとする。すると、A と B の結果が異なる偏光板の設定は以下の 4 つの場合だけである：

- (A1 B3)、(A2 B3)： 結果は A が青、B が赤
- (A3 B1)、(A3 B2)： 結果は A が赤、B が青

その他の 5 つの設定では

- (A1 B1), (A2, B2), (A1 B2), (A2, B1)： 結果は A 青、B 青
- (A3 B3)： 結果は A 赤、B 赤

と、A と B の結果は同じになる。2 つの偏光板をランダムに設定したとすると、どの設定になる確率も同じなので、 $X = 2$  (青青赤) の光子の場合、結果が異なる確率  $P_d$  は  $4/9$  である。この結果は、例えば  $X = 3$  (青赤青) のように、 $X = 1$  (青青青) と  $X = 8$  (赤赤赤) 以外の 6 種類全ての種類の光子で同じである。即ち、表 4.2 の  $X = 2 \sim 7$  の 6 つの値の隠れた変数の光子対であればどんな割合で飛んできたとしても、 $P_d = 4/9$  となる。これは量子力学による結果  $1/2$  より小さい。

一方、隠れた変数  $X = 1$  (青青青) の光子対の場合は偏光板の設定が何でも青となるのだから、A と B の結果はいつも同じである。隠れた変数  $X = 8$  (赤赤赤) の光子対も同様である。

以上の考察から以下のことが分かる。光源から放出される光子に  $X = 1$  (青青青) と  $X = 8$  (赤赤赤) が含まれないとすると A と B の結果が異なる確率  $P_d$  は  $4/9$  になり、もし  $X = 1$  (青青青) と  $X = 8$  (赤赤赤) が含まれると  $P_d$  はそれより更に小さくなる。即ち、

隠れた変数が存在し光子の状態が観測以前に決まっていれば、検出器 A と B の結果が異なる確率  $P_d$  は、不等式

$$P_d \leq \frac{4}{9} \quad (4.19)$$

を満たさなければならない

この様に、隠れた変数理論が存在したと仮定して導かれる、測定結果の相関が満たすべき不等式をベル不等式という。既に式 (4.18) で得たように

量子力学の結果  $P_d = 1/2$  はベル不等式 (4.19) を満たさない！

即ち、量子力学と隠れた変数理論は両立しないのである。

アスペの実験： 隠れた変数理論が量子力学と矛盾する結果を導いたので、どちらが正しいかは実験によって検証できる。2光子の偏光についての上述したような実験は、実際にアスペ (Aspect) によってなされ<sup>9</sup>、その結果はベル不等式を満たさず量子力学を支持するものであった<sup>10</sup>。

#### 4.5.4 ベル不等式とアスペの実験の意味

絡み合い状態に対する波束の収縮は、量子力学のもっとも奇妙な側面で、EPR の批判以降、多くの実験で量子力学に基づくさまざまな結果が定量的に確認された後でも、常に論争の的になっていた。だが、論争は哲学的な側面が強く、Bell 不等式が発見されるまでは実験に基づく実証的な検証が可能だとは考えられていなかった。

ところが、隠れた変数が存在したとすれば満たさなければならない不等式、即ちベル不等式が発見され、それが実際には満たされていないことがアスペの実験によって示された結果、それまでの哲学的論争に対して、実験結果に基づいて決着がついてしまった。即ち、

「光子の偏光測定の結果が、実際に観測する前から決まっている」とするのは間違い

ということが、実験的に検証された。別の言葉でいうと、

観測前には物理量の値が決まっておらず、観測の結果、確率的に値が決まるという量子力学の解釈は、量子力学が不完全ということを示しているわけではない

とすることだ。つまり、以下の2つの主張

- 「本当は観測前に既に結果は決まっているが、制御できない未知変数の為に、観測してみないと分からない」という隠れた変数理論
- 「観測するまでその結果がどうなるか確定していない」という量子力学のコペンハーゲン解釈

の違いを実験的に判定する方法があり、量子絡み合い状態の実験によって前者ではありえないことが証明されたという訳だ。

**問題 4.5** AB 同じ設定の測定結果 (4.16) と異なる設定の結果 (4.17) の両方を満たす隠れた変数  $X$  の分布もありえないことを、上と同様の議論で示せ。

---

<sup>9</sup> A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 91-94. “Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A new Violation of Bell’s Inequalities”, A. Aspect, J. Delibard, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1804-1807. “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers”

<sup>10</sup>ベル不等式の破れについては最近さらに精密な実験がなされた。B. Hensen, et al. Nature 526, 682-686 (2015). 解説記事としては、日経サイエンス、2019年2月号の“最終決着「ベルの不等式」の破れ実験”参照。

## 4.6 野球原理

哲学的に考えて、量子力学の更に奇妙な側面が、マーミンによって指摘された<sup>11</sup>。問題は、

**命題：**ある場所(A)での検出器の設定が、遠く離れた別の場所(B)での別の検出器による測定結果に影響を与えない

というのは本当か？ということだ。これをこれまで議論してきた2光子偏光実験に基づいて議論する。マーミンはこの命題を彼一流のユーモアをもって野球原理と呼んだ。即ち、上の原理は本質的に

家のテレビのスイッチを入れて応援しても、しなくても、ヤフオクドーム<sup>12</sup>でのソフトバンクの試合の結果は変わらない

という原理と同じという訳だ。

この原理はまったく当たり前で詳しく検討するまでもないことのように見える。実際に球場に出かけて行って声援すれば少しは選手に影響を与えることができるかも知れないが、家で寝転んでテレビで応援しても試合の結果には何の影響もない、と言うのがあらゆる意味で合理的な推論だろう。でも、

これが本当かどうか実証できるのか？

というのが問題だ。

### 4.6.1 弱い野球原理と強い野球原理

マーミンの主張をより明確にするために、以下のように「弱い野球原理」と「強い野球原理」の2つを区別する。

**弱い野球原理：**私がテレビで野球を見ていた場合と、見ていない場合で、ソフトバンクの勝率は変わらない

これは統計的な主張なので、実際に統計をとって見て本当かどうか検証することができる。

しかし、野球ファンが本当に知りたいのはこれではない。私が見ないうちに負けてしまった昨日の試合の勝敗が、もしテレビで応援していたらひょっとして違ったかもしれない、ということだ。別の言い方をすると、

**強い野球原理：**私がテレビで見ていない間に負けてしまった昨日の試合の結果は、仮に私がテレビで応援していたとしても変わらない

<sup>11</sup>N. David Mermin, in “Boojums All The Way Through” (Cambridge University Press, 1990). “Can you help your team tonight by watching on TV? More experimental metaphysics from Einstein, Podolsky, and Rosen”

<sup>12</sup>福岡ドーム。2020年に「福岡PayPayドーム」と改称された。

というのが本当かどうかである。

こんなことを問いかけるのは無意味ではないか？実際に起こらなかった仮定の話の真偽を問うことは、そもそも意味がない、というのは常識だろう。

しかし、マーミンは2光子偏光実験を詳しく解析することによって、

強い野球原理は間違いであると実証できる

と主張した。つまり、実際にはテレビで見ていなかった野球の試合の勝敗が、「仮にテレビで応援していたとしても変わらない」と主張するのは誤りであるという実験的証拠があるという訳だ。以下に、その議論を解説する。

#### 4.6.2 2光子偏光実験における野球原理

まず、今述べた野球原理の内容を、2光子偏光実験の場合に即した形にまとめておこう：

野球原理： 検出器 A の偏光板の設定は、検出器 B の測定結果に影響を与えない

弱い野球原理： 検出器 A の偏光板をどう設定しても、検出器 B の測定結果の統計的性質は変わらない

強い野球原理： 検出器 A の偏光板をある設定にして行った、ある過去の実験の検出器 B の結果は、仮に A の偏光板を別の設定にしていたとしても、同じである

##### 弱い野球原理

検出器 A と B の設定をどちらも 1 にして実験をすると、例えば、結果は以下ようになる：

A 1 : 赤赤青青青青赤赤赤青赤赤赤青赤赤青青赤赤赤青赤赤赤赤...  
B 1 : 赤赤青青青青赤赤赤青赤赤赤青赤赤青青赤赤赤青赤赤赤赤...  
○○...

3行目の○は、検出器 A と B の結果が一致していること示す。A と B の設定が同じなので、両者の結果はいつも一致するが、A の結果だけ或いは B の結果だけを見ていると青と赤のランダムな並びでどちらも 1/2 の確率で生じている。

次に、検出器 A の設定だけを 2 に変えて実験をしてみる。その結果は、例えば以下ようになる。

A 2 : 青赤赤赤赤赤赤赤赤青赤赤青赤赤青赤青赤青青青赤赤...  
B 1 : 青青青青赤赤青青赤青青青赤青青赤青青赤青青赤赤赤赤赤...  
○...○...○...○...○...○...○...○...○...○...○...○...○...

B の設定は前と同じ 1 だが、別の実験なので結果は異なる。また、今度は A と B の設定が異なるので、両者の結果が一致するのは確率 1/4 になる。しかし、B の結果だけを見てみると、青と赤の確率 1/2 のランダムな並びでしかないので、統計的には前の実験との区別はつかない。

更に、検出器 A の設定を 3 に変えて実験をしてみる。その結果は、例えば以下のようなになる。

A 3 : 青赤赤赤青青赤赤青赤青赤青赤赤青赤赤青赤赤青赤青赤青青...  
 B 1 : 赤青青赤青青青青青青赤青赤赤赤赤赤青青赤赤赤青赤赤赤赤...  
 . . . ○ . ○ ○ ○ . . ○ . . . . . ○ ○ . . . . . ○ . . . . . ○ . . . . .

今度も A と B の設定が異なるので、両者の結果が一致する確率は 1/4 しかないが、B の結果だけを見ると、やはり確率 1/2 の青と赤のランダムな並びでしかないので、前の 2 回の実験との区別はつかない。

つまり、弱い野球原理は成り立っており、

毎回の結果は異なるが、統計的には A の設定は B の結果に影響を与えない。

これは、すでに説明したように、検出器 B の測定結果から検出器 A の設定を知ることができないということを意味している。つまり、絡み合い状態の波束の収縮による量子相関を用いた超光速通信は、不可能である。

### 強い野球原理

では、強い野球原理が成り立っているかどうかについて、この実験から何かいえるだろうか？強い野球原理は、実際には起こらなかったことについての主張なので、検証可能な議論などできるはずがないと思うかもしれない。しかし、仮に強い野球原理が成り立っているとして、以下のような議論をしてみよう。

実際には A1B1 の設定で実験を行ったが、  
仮に、A1B2 で行なっていたとしても A の結果は同じなら、  
 B の結果はどうなるか？

実際に行った実験 A1B1： 検出器 A と B の偏光板をどちらも 1 に設定して実験を行い、その結果が以下のものであったとする：

A 1 : 赤青青青赤青青青赤青青赤赤赤赤赤青赤青青青青赤赤青...  
 B 1 : 赤青青青赤青青青赤青青赤赤赤赤赤青赤青青青青赤赤青... (4.20)  
 ○○○

最後の行は、A と B の結果が一致したところを○で示している。結果は青と赤が確率 1/2 で現れるランダムな列だが、偏光板の設定が同じなので、両者は必ず同じ結果になる。今の場合、全ての結果が一致するので、すべて○である。

仮想実験 A1B2： では、実際には A1B1 で実験をして上の結果を得たのだが、「仮に A1B2 の設定で実験をしていたとしたらどうなっていたか」想像してみよう。B の設定を 1 ではなく 2 にしていたとしても、「強い野球原理」により A の結果は変わらないとする。すると、B の結果は例えば以下ようになるはずだ。

$$\begin{array}{l}
 A\ 1 : \text{赤青青青赤青青青赤青青赤赤赤赤赤青赤青青青青赤赤青} \dots \\
 B\ 2 : \text{青青赤赤赤赤赤赤青赤赤青赤青青青青青赤赤青赤青赤青} \dots \\
 \quad \cdot \text{O} \cdot \dots \text{O} \cdot \text{O} \cdot \dots \dots \dots \text{OO} \cdot \text{O} \cdot \text{O} \cdot \dots \text{OO} \dots
 \end{array} \quad (4.21)$$

即ち、今度は A と B で設定が異なるので、A と B の結果が同じになる確率 1/4 である。B だけを見ていると、確率 1/2 の青と赤のランダムな並びでしかないが、A の結果との相関があり確率 3/4 で A と逆の結果になるので、A の結果が前のままだとすると B の結果の並びかたには、統計的にかなり強い制限が加わる。

仮想実験 A3B1： では、B は実際の実験と同じ 1 で、A の設定を 1 ではなく 3、即ち、もし A3B1 の設定で実験をしていたとする。今度は、B の結果が実際の実験と同じだとしたら、A の結果はどうなっていたらう？

$$\begin{array}{l}
 A\ 3 : \text{青赤赤赤赤青赤赤青赤赤赤青青青青赤青赤青青赤赤赤赤青赤} \dots \\
 B\ 1 : \text{赤青青青青赤青青青青赤青青赤赤赤赤赤青赤青青青青赤赤青} \dots \\
 \quad \cdot \dots \dots \text{O} \cdot \dots \text{OO} \cdot \dots \text{O} \cdot \dots \text{O} \cdot \dots \text{O} \cdot \dots
 \end{array} \quad (4.22)$$

やはり、A と B の設定が異なるので、A と B で同じになるのは確率 1/4 で、確率 3/4 で異なる結果になる。B の結果は実際の実験と変わらないとすると、それに整合する A の結果はかなり強い制限がかかる。

仮想実験 A3B2： さらに想像力を膨らましてみよう。実際には A1B1 で実験をして結果 (4.20) を得ているのだが、上の 2 つの仮想実験の結果についての仮定も本当だとして、仮に A3B2 で実験をしていたとしたらどうなただろうか？ もし、A1B2 で実験をしていたら結果 (4.21) を得ていたはずだし、もし、A3B1 で実験をしていたら結果 (4.22) を得ていたはずだったので、仮に **A3B2** で実験をしていても**仮想の結果 (4.21) の B の部分と仮想の結果 (4.22) の A の部分は変わらない**とすると、

$$\begin{array}{l}
 A\ 3 : \text{青赤赤赤赤青赤赤青赤赤赤青青青青赤青赤青青赤赤赤赤青赤} \dots \\
 B\ 2 : \text{青青赤赤赤赤赤赤青赤赤青赤青青青青青赤赤青赤青赤青} \dots \\
 \quad \text{O} \cdot \text{OOO} \cdot \text{OOOOOO} \cdot \dots \text{OOO} \cdot \text{O} \cdot \dots \text{O} \cdot \text{O} \cdot \dots
 \end{array} \quad (4.23)$$

となるはずだ。しかし、これはありえない結果である。なぜなら、A と B の設定が異なるので、A と B の結果は確率 3/4 で異なるものになるはずだが、今までの議論からそうはならない。つまり、結果 (4.21) の B の結果も、結果 (4.22) の A の結果も、同じ結果 (4.20) と比べて、確率 1/4 で同じで確率 3/4 で異なる。そのため、結果 (4.21) の B と結果 (4.22) の A



が異なる確率  $P_{\text{diff}}$  は  $1/2$  以上にはなり得ない！

$$P_{\text{diff}} \leq \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

つまり、一つの実際の実験を前提に、その A または B の結果が他方の設定に依存しないとして、3つの仮想実験の結果を矛盾なく構成する事は不可能なのだ。

### 4.6.3 非常に強い野球原理

これまでの議論をまとめると、

「実際には A1B1 で実験をしたが、

1. 仮に、A3B1 で実験をしたとしても、B の結果は変わらず、
2. A1B2 で実験をしたとしても、A の結果は変わらず、
3. さらに、仮に A3B2 で実験をしたとして、  
A の結果は A3B1 の場合と変わらず、  
B の結果は A1B2 の場合と変わらない、

として推論した仮想実験 A3B2 の結果は正しくない」

ということである。上の推論で、1. と 2. は「強い野球原理」の仮定である。3. の仮定は、それよりさらに強い仮定で、「非常に強い野球原理」とも言うべきものであろう：

**非常に強い野球原理：**実際には実験をしなかったが、仮に実験をしたとして、その際の A の設定が 2 であっても、3 であっても、B の設定が同じなら B の結果は同じ。

これを野球の例で述べてみると

**非常に強い野球原理：**母校の野球部は甲子園には出場できなかったが、仮に決勝戦までいったとして、その勝敗は、私がテレビで観戦して応援してもしなくても変わらない。

無関係の装置の設定であっても、実際にした実験とは別の設定で実験をした場合の結果も、実際にした実験と同じになるはずと主張するのは、観測しなかった量についてもその結果が確定しているはずという、隠れた変数の理論の主張に似ている。ベル不等式や野球原理に現れる矛盾は、量子力学の示す不確定性がとても深いことを示唆している。

量子力学は、実際に起こらなかったことについての可能性を最大限許しているかのようで、起こらなかったことについての一見合理的で無害に見える主張も、量子力学に矛盾することがある。

そして、自然は量子力学に従っているようだ。

## 4.7 付録：合成系の絡み合い状態と Schmidt 分解定理

合成系の絡み合い状態をそれぞれの系の状態の直積に因数分解できない状態と定義した。一般に、合成系の状態に対しては Schmidt 分解定理が成り立つ。

**Schmidt 分解定理：** 系 A と系 B の合成系の状態  $|\psi\rangle_{AB}$  は、系 A の正規直交系  $(|u_\ell\rangle_A)_{\ell=1}^n$  および系 B の正規直交系  $(|v_\ell\rangle_B)_{\ell=1}^n$  を用いて、

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell |u_\ell\rangle_A \otimes |v_\ell\rangle_B, \quad \lambda_\ell > 0 \quad (4.24)$$

と表される。ただし、 $n$  は 1 以上の整数。

$\lambda_\ell$  を Schmidt 係数、 $n$  を Schmidt ランクといい、Schmidt 係数は順序を除いて一意的である。 $n = 1$  のとき状態  $|\psi\rangle_{AB}$  は可分、 $n > 1$  のときエンタングルしているという。

**証明：**まず、系 A の基底を  $(|i\rangle_A)_{i=1}^{d_A}$ 、系 B の基底を  $(|j\rangle_B)_{j=1}^{d_B}$  とすると、合成系の状態  $|\psi\rangle_{AB}$  はこれらを用いて

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} c_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \quad (4.25)$$

と表せる。ここで、 $d_A$  および  $d_B$  は系 A および系 B の状態空間の次元で、 $c_{ij}$  は複素係数。一般に  $c_{ij} \neq c_{ji}$  であることに注意。

ここで、 $C$  を

$$C := (c_{ij})$$

すなわち、 $ij$  成分が  $c_{ij}$  の  $d_A$  行  $d_B$  列の複素数行列とする。

すると、 $C^\dagger C$  は  $d_B \times d_B$  の正定値エルミート行列で、その固有値・固有ベクトルの組を  $(\lambda_\ell^2, \vec{v}_\ell)_{\ell=1}^{d_B}$ 、すなわち、

$$C^\dagger C \vec{v}_\ell = \lambda_\ell^2 \vec{v}_\ell; \quad 1 \leq \ell \leq d_B \quad (4.26)$$

とする。ただし、 $\lambda_\ell \geq 0$  で、 $d_B$  次元複素数ベクトル  $\vec{v}_\ell$  は規格直交化されているとする：

$$\vec{v}_\ell^\dagger \cdot \vec{v}_{\ell'} = \delta_{\ell, \ell'}, \quad (1 \leq \ell, \ell' \leq d_B).$$

ここで、ゼロでない  $\lambda_\ell$  の個数を  $n$  とし、

$$\begin{aligned} 1 \leq \ell \leq n & \text{ のとき } \lambda_\ell > 0 \\ n < \ell \leq d_B & \text{ のとき } \lambda_\ell = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

とする。

$\lambda_\ell > 0$  ( $1 \leq \ell \leq n$ ) に対して、 $d_A$  次元の複素数ベクトル  $\vec{u}_\ell$  を

$$\vec{u}_\ell := \frac{1}{\lambda_\ell} C \vec{v}_\ell$$

と定義する。すると、

$$\vec{u}_\ell^\dagger \cdot \vec{u}_{\ell'} = \frac{1}{\lambda_\ell} \vec{v}_\ell^\dagger C^\dagger C \vec{v}_{\ell'} \frac{1}{\lambda_{\ell'}} = \delta_{\ell, \ell'}$$

となり、 $\vec{u}_\ell$  も規格直交化されていることが分かる。

この数ベクトル  $\vec{v}_\ell$  および  $\vec{u}_\ell$  を用いて、

$$|u_\ell\rangle_A := \sum_{i=1}^{d_A} u_{\ell,i} |i\rangle_A, \quad |v_\ell\rangle_B := \sum_{j=1}^{d_B} v_{\ell,i}^* |j\rangle_B$$

を定義する。ここで、 $u_{\ell,i}$  および  $v_{\ell,j}$  は、それぞれ  $\vec{u}_\ell$  および  $\vec{v}_\ell$  の  $i$  成分および  $j$  成分である。

この  $(|u_\ell\rangle_A)_{\ell=1}^n$  および  $(|v_\ell\rangle_B)_{\ell=1}^n$  は規格直交化されていて、これらを用いて  $|\psi\rangle_{AB}$  は式 (4.24) で表されることが、以下のよう示される。

$d_B$  次元複素数ベクトル空間の  $\lambda_\ell \neq 0$  の部分空間への射影を  $P$ 、その補空間への射影を  $P_\perp$  とすると、それらは

$$P := \sum_{\ell=1}^n \vec{v}_\ell : \vec{v}_\ell^\dagger, \quad P_\perp := 1 - P = \sum_{\ell=n+1}^{d_B} \vec{v}_\ell : \vec{v}_\ell^\dagger$$

と表される<sup>13</sup>。すると、式 (4.26) および式 (4.27) より、

$$(CP_\perp)^\dagger (CP_\perp) = P_\perp C^\dagger C P_\perp = 0$$

なので、

$$CP_\perp = 0.$$

故に、

$$C = C(P + P_\perp) = CP + CP_\perp = CP.$$

これを用いて、

$$C = CP = \sum_{\ell=1}^n C \vec{v}_\ell : \vec{v}_\ell^\dagger = \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell \vec{u}_\ell : \vec{v}_\ell^\dagger$$

をえる。これを成分で書くと

$$c_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell u_{\ell,i} v_{\ell,j}^*$$

<sup>13</sup> 2つの数ベクトル  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  に対して、 $\vec{a} : \vec{b}^\dagger$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のダイアディックと呼び、 $(i, j)$  成分が  $a_i b_j^*$  の数行列を表す。

なので、式 (4.25) より、

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} \sum_{\ell=1}^n \lambda_{\ell} \left( u_{\ell,i} |i\rangle_A \right) \otimes \left( v_{\ell,j}^* |j\rangle_B \right) = \sum_{\ell=1}^n \lambda_{\ell} |u_{\ell}\rangle_A \otimes |v_{\ell}\rangle_B$$

をえる。 ■

**問題 4.6**  $C^{\dagger}C$  が正定値エルミート行列であることを示せ。

**問題 4.7** 以下の 2 光子系の偏光状態を Schmidt 分解せよ。

$$|\psi_1\rangle := |xx\rangle + 2|xy\rangle + |yy\rangle$$

$$|\psi_2\rangle := |xx\rangle + 2|xy\rangle + 2|yx\rangle + |yy\rangle$$

ただし、 $|x\rangle$  および  $|y\rangle$  はそれぞれ 1 光子系の  $x$  偏光、 $y$  偏光状態を表し、 $|xy\rangle := |x\rangle_A \otimes |y\rangle_B$  等とする。

# 第5章 量子テレポーテーション

量子状態は複製することはできない。しかし、エンタングル状態を測定することによって引き起こされる波束の収縮を用いると、系を移動させずに、その系の任意の状態を別の場所に転送することができる。この現象は量子テレポーテーションと呼ばれている。

## 5.1 量子複製不可能定理

古典物理学では、測定による影響を小さくしたまま対象の系の状態をいくらかでも正確に知ることができる。その情報を用いて、ある与えられた系と同じものをいくつも複製することに、原理的な制限はない。

一方、量子状態は一回の測定で量子状態を正確に同定することはできない上に、系の状態を観測するといわゆる波束の収縮を引き起こし、観測前の状態を壊してしまう。そのため、観測によって得られる系の情報に基づき、元の系と同じものを構成することは、原理的にできない。

### 5.1.1 量子複製を用いた超光速通信

既に議論したように、絡み合い状態の量子相関によって情報を伝えることは出来ない。しかし、仮に量子状態を複製することができたとしたら、絡み合い状態の量子相関を用いて超光速通信が可能になってしまう。そのことをまず説明しよう。

第4.3節で議論したように、2光子状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|xx\rangle + |yy\rangle) \quad (5.1)$$

を準備して、光子Iを左の測定装置A、光子IIを右の測定装置Bで測定するとする。測定装置Aを操作するAさんは偏光版の偏光軸を(i)  $x$ 方向か、(ii)  $x$ 軸に対して  $\pi/4$ 方向（以下  $\pi/4$ 方向と呼ぶ）の、どちらかに向けて光子Iの偏光を測定することにして、そのことをBさんに予め伝えておく。すると、

- Aさんが偏光版を  $x$ 方向に設定して2光子状態(5.1)にある光子Iを観測した場合には、測定装置Aでの結果は確率  $1/2$  で青か赤になり、それに応じて光子IIの状態は  $|x\rangle_{\text{II}}$  か  $|y\rangle_{\text{II}}$  に収縮する。
- Aさんが  $\pi/4$ 方向に設定して光子Iを観測した場合にも、やはり測定装置Aでの結果は確率  $1/2$  で青か赤になる。しかし、今度は光子IIの状態は  $|x_{\pi/4}\rangle_{\text{II}}$  か  $|y_{\pi/4}\rangle_{\text{II}}$  に収縮する。

もし、Bさんが光子IIを測定することによって、その状態が $|x\rangle_{II}$ か $|y\rangle_{II}$ 、あるいは $|x_{\pi/4}\rangle_{II}$ か $|y_{\pi/4}\rangle_{II}$ のどちらにあるかを判定できれば、Aさんは測定装置Aの設定を通じてBさんに情報を伝えることができる。しかし、光子IIの状態は一回しか測定できないので、Bさんは自分の偏光版をどのように設定したとしても確率1/2で青か赤の結果を得るだけである。したがって、その結果からAさんの偏光板の設定について何の情報も得られない。

ところが、もし量子複製が可能で、Bさんが光子IIと同じ状態の光子の測定を繰り返して行えるとすれば、Bさんは以下のようにしてAさんの偏光板の設定が $x$ 方向か $\pi/4$ 方向のどちらであるかを、簡単に、いくらでも高い確率で知ることができる。

そのためには、Bさんは偏光版を $x$ 軸に固定して光子IIおよびそれを複製した同じ状態の光子を測定を何度か繰り返すだけでよい。するとBさんの測定結果は、

$$(i) \text{ 全て青、 } (ii) \text{ 全て赤、 } (iii) \text{ 確率 } 1/2 \text{ で青か赤} \quad (5.2)$$

のどれかになる。(i)または(ii)であればAさんの設定は $x$ 軸方向で、(iii)であれば $\pi/4$ 方向である。複製を $n-1$ 個作成して $n$ 回測定したとすれば、本当は(iii)なのに、間違っって(i)または(ii)と判定してしまう確率は $2 \times (1/2)^n$ となる。従って、 $n$ を大きくすることによりいくらでも誤判定の確率を減らすことができる。

**問題 5.1** どうして(5.2)のようになるのか説明せよ。

### 5.1.2 量子複製不可能定理

しかし、量子状態を複製することはできない。それは以下のように定式化され、簡単に証明することができる。

**量子複製不可能定理 (No-Cloning Theorem):** 任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して、

$$\hat{U}(|\psi\rangle \otimes |e\rangle) = e^{i\alpha(\psi)} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad (5.3)$$

となるような状態 $|e\rangle$ と時間発展演算子(ユニタリ演算子) $\hat{U}$ は存在しない。ただし、 $\alpha(\psi)$ は実数で $|\psi\rangle$ に依存する位相である。

**証明:** 任意の状態に対して式(5.3)が成り立つとすると矛盾することを示す。2つの異なる状態 $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ に対して

$$\hat{U}(|\psi\rangle \otimes |e\rangle) = e^{i\alpha(\psi)} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle, \quad \hat{U}(|\phi\rangle \otimes |e\rangle) = e^{i\alpha(\phi)} |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

成り立つとする。これらの内積をとると、

$$(\langle\phi| \otimes \langle e|) \hat{U}^\dagger \hat{U} (|\psi\rangle \otimes |e\rangle) = (\langle\phi| \otimes \langle\phi| e^{-i\alpha(\phi)}) (e^{i\alpha(\psi)} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle)$$

$\hat{U}$  がユニタリ演算子であること、すなわち  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = 1$  を用いると、

$$\langle \phi | \psi \rangle \langle e | e \rangle = e^{-i\alpha(\phi) + i\alpha(\psi)} \langle \phi | \psi \rangle^2$$

となり、この両辺の絶対値をとると

$$|\langle \phi | \psi \rangle| = |\langle \phi | \psi \rangle|^2.$$

をえる。しかし、これは任意の  $|\psi\rangle$  と  $|\phi\rangle$  に対しては成り立たない。 ■

## 5.2 量子テレポーテーション

量子状態を複製することはできないが、観測に伴う波束の収縮を用いて任意の量子状態を転送することはできる。ただし、そのためには

1. エンタングル状態にある2つの系のうち、一つを転送元に、もう一つを転送先に、予め分配しておく、
2. 転送元で行った観測の結果を転送先に通常の通信手段で伝え、
3. 伝えられた観測結果に応じて、転送先で系に操作を加える。

という事前の準備と操作が必要がある。以下に、2準位系を例にとってその手順を説明しよう。そのための準備として、まず、ベル基底とベル測定について説明する。

### 5.2.1 ベル基底とベル測定

2準位系の基底を

$$|0\rangle, \quad |1\rangle \tag{5.4}$$

と表そう。2つの2準位系を系Aおよび系Bとする。系Aと系Bの合成系の状態空間は4次元で、その基底は式(5.4)のテンソル積を用いて

$$|00\rangle, \quad |01\rangle, \quad |10\rangle, \quad |11\rangle \tag{5.5}$$

と取れる。ただし、

$$|00\rangle := |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \tag{5.6}$$

等とする。これらを用いて、4つの独立なエンタングル状態

$$\begin{cases} |\Phi^+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \\ |\Phi^-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\ |\Psi^+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |\Psi^-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \end{cases} \tag{5.7}$$

を構成することができる。これらをベル基底とよび、式(5.5)の代わりに、(5.7)を2準位合成系の基底に取ることもでき、合成系ABの任意の状態はベル基底を用いて

$$|\Psi\rangle_{AB} = C_1 |\Psi^+\rangle + C_2 |\Psi^-\rangle + C_3 |\Phi^+\rangle + C_4 |\Phi^-\rangle \quad (5.8)$$

と表すことができる。ここで、 $C_i$  ( $i = 1 \sim 4$ )は複素数で

$$\sum_{i=1}^4 |C_i|^2 = 1$$

と規格化されているとする。

2つの2準位系の合成系に対してベル基底(5.7)を区別する測定、すなわち、演算子

$$\begin{aligned} \hat{M} := & M_1 |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+| + M_2 |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-| \\ & + M_3 |\Psi^+\rangle \langle \Psi^+| + M_4 |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| \end{aligned} \quad (5.9)$$

に対応する物理量の測定(射影測定と呼ばれる)をベル測定という。ここで、 $M_i$  ( $i = 1 \sim 4$ )は互いに異なる実数で、 $\hat{M}$ を測定したときに得られる観測量である。例えば、状態(5.8)にある系に対してベル測定をすると、確率 $|C_1|^2$ で観測量 $M_1$ が得られ、その時、系の状態は $|\Phi^+\rangle$ に収縮する。

### 5.2.2 量子テレポーテーションの手順

さて、Aさんの手元には別の2準位系 $A'$ があり、その状態を

$$|\psi\rangle_{A'} = a |0\rangle_{A'} + b |1\rangle_{A'} \quad (5.10)$$

としよう。系 $A'$ を実際に運ばずに、 $|\psi\rangle_{A'}$ の状態をBさんに転送したい。

AさんとBさんは事前にベル基底(5.7)の一つ、例えば $|\Phi^+\rangle_{AB}$ にある系Aと系Bをそれぞれ手元に持っていたとする。Aさんの手元にあるもう一つの系 $A'$ をあわせた3つの2準位系の合成系の状態は

$$|\Psi\rangle_{A'AB} = |\psi\rangle_{A'} \otimes |\Phi^+\rangle_{AB}$$

である。これを、系 $A'A$ のベル基底で表すと、

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{A'AB} = & \frac{1}{2} |\Phi^+\rangle_{A'A} \otimes (a |0\rangle_B + b |1\rangle_B) \\ & + \frac{1}{2} |\Phi^-\rangle_{A'A} \otimes (a |0\rangle_B - b |1\rangle_B) \\ & + \frac{1}{2} |\Psi^+\rangle_{A'A} \otimes (a |1\rangle_B + b |0\rangle_B) \\ & + \frac{1}{2} |\Psi^-\rangle_{A'A} \otimes (a |1\rangle_B - b |0\rangle_B) \end{aligned} \quad (5.11)$$

となる。この状態にある系 $A'A$ に対してAさんがベル測定(5.9)をすると、以下の4つの場合のいずれかが同じ確率で起こることが分かる。



1. 観測結果  $M_1$  をえて、系 A'A は  $|\Phi^+\rangle_{A'A}$  に収縮し、  
系 B は  $|\psi\rangle_{B1} := a|0\rangle_B + b|1\rangle_B$  に遷移する。
2. 観測結果  $M_2$  をえて、系 A'A は  $|\Phi^-\rangle_{A'A}$  に収縮し、  
系 B は  $|\psi\rangle_{B2} := a|0\rangle_B - b|1\rangle_B$  に遷移する。
3. 観測結果  $M_3$  をえて、系 A'A は  $|\Psi^+\rangle_{A'A}$  に収縮し、  
系 B は  $|\psi\rangle_{B3} := a|1\rangle_B + b|0\rangle_B$  に遷移する。
4. 観測結果  $M_4$  をえて、系 A'A は  $|\Psi^-\rangle_{A'A}$  に収縮し、  
系 B は  $|\psi\rangle_{B4} := a|1\rangle_B - b|0\rangle_B$  に遷移する。

このうち 1. の結果が  $M_1$  の場合には  $|\psi\rangle_{B1}$  は  $|\psi\rangle_{A'}$  に等しく、実際に、波束の収縮によって状態が系 A' から系 B に転送されている。一方、2.~4. の場合には状態  $|\psi\rangle_{Bi}$  は  $|\psi\rangle_{A'}$  に等しくない。しかし、A さんがベル測定の結果を B さんに伝えて、B さんが測定結果に応じたユニタリ変換を手元の系 B に施せば、すべての場合に  $|\psi\rangle_B$  を得ることができる。

すなわち、

2. 観測結果が  $M_2$  の場合には、ユニタリ変換  $\hat{U}_{B2} := |0\rangle_B\langle 0| - |1\rangle_B\langle 1|$
3. 観測結果が  $M_3$  の場合には、ユニタリ変換  $\hat{U}_{B3} := |0\rangle_B\langle 1| + |1\rangle_B\langle 0|$
4. 観測結果が  $M_4$  の場合には、ユニタリ変換  $\hat{U}_{B4} := |0\rangle_B\langle 1| - |1\rangle_B\langle 0|$

をそれぞれ  $|\psi\rangle_{Bi}$  に施せばよい。

結局、A さんが系 A'A の対してベル測定を行い、その結果を B さんに伝えて、B さんがそれに応じて適当なユニタリ変換を系に施すことによって、A さんから B さんへ系 A' の任意の状態を系 B に転送することができる。これを量子テレポーテーションという。

A さんと B さんは、事前にベル基底状態を共有し、またベル測定結果を伝えるために通常の手段による通信（古典通信という）をする必要があるが、系 A' を運ぶ必要はない。もとの系 A' の状態は、ベル測定の結果壊れてしまうので、A さんの手元には残らない。

**問題 5.2** 式 (5.11) を示せ。

**問題 5.3**  $\hat{U}_{Bi}$  ( $i = 2 \sim 4$ ) がユニタリ演算子であることを示せ。また、 $\hat{U}_{Bi}|\psi\rangle_{Bi} = |\psi\rangle_B$  となることを確かめよ。

**問題 5.4** 事前に共有するベル基底が  $|\Psi^+\rangle_{AB}$  の場合には、量子テレポーテーションの手順はどう変更されるか。