

2024年4月24日

物理数学 II 講義ノート

2008 年度

中西 秀

注意

- これは、諸君が講義中に式を写すことに煩わされずに内容を理解することに集中できるように用意した、講義ノートである。図はすべて略されているので、講義中に各自記入すること。
- この講義ノートは、これだけで閉じたものを目指してはいない。即ち、理解できない点やより詳しく知りたいことがあれば、積極的に教員に質問したり参考書などを自分で調べることが必要である。
- 各節の重要事項は、Keywords として列挙してある。最低限これらの語を理解し説明できるようになること。

参考書

以下の本は、この講義ノートを準備するにあたり参考にした本である。これ以外にも多くの優れた本があるので、各自の興味や必要に応じて、何かまとまった本を読まれることを勧める。

寺沢寛一	自然科学者のための数学概論	岩波	2
寺沢寛一	自然科学者のための数学概論 応用編	岩波	4
辻正次、他	大学演習関数論	裳華房	1
クーラン・ヒルベルト	数理物理学の方法	東京図書	4
沢田昭二	パリティ物理学コース 物理数学	丸善	1 & 3
堤正義	サイエンスライブラリー 応用数学	サイエンス社	3
高橋健人	サイエンスライブラリー 初等応用解析	サイエンス社	
Mathews & Walker	Mathematical Methods of Physics	Benjamin	4
寺田文行、他	サイエンスライブラリー 演習微分方程式	サイエンス社	2
Morse & Feshbach	Methods of Theoretical Physics Vol. 1 & 2	McGraw-Hill	4

その他、物理数学、応用数学、応用解析のようなタイトルの本。

複素関数論の初等的教科書

- 複素解析、アールフォルス 著、笠原乾吉 訳、現代数学社
- 複素関数入門、神保道夫 著、岩波書店

目次

第 1 章	複素関数	1
1.1	複素数と正則関数	1
1.1.1	複素数とその演算	1
1.1.2	複素関数の例	2
1.1.3	複素関数の微分と正則関数	3
1.1.4	正則関数の満たす条件 (Cauchy-Riemann 関係式)	3
1.1.5	調和関数	4
1.1.6	等角写像	5
1.2	複素数の積分と Cauchy の積分定理	6
1.2.1	複素積分	6
1.2.2	Taylor 展開と Laurent 展開	10
1.2.3	零点と一致の定理	11
1.3	特異点と留数	12
1.3.1	特異点	12
1.3.2	留数	14
1.4	解析接続と Riemann 面	16
1.4.1	解析接続	16
1.4.2	Riemann 面	18
第 2 章	常微分方程式	20
2.1	微分方程式	20
2.2	一階常微分方程式	21
2.3	n 階線型常微分方程式	23
2.3.1	定数係数の同次線形常微分方程式	25
2.3.2	非同次線形常微分方程式	25
2.4	2 階線形常微分方程式の級数解法	28
2.4.1	常微分方程式の正則点	28
2.4.2	Fuchs 型常微分方程式	29
2.5	随伴微分方程式	32
2.6	境界値問題と固有値, 固有関数	33
2.6.1	Green 関数	33
2.6.2	固有値, 固有関数	35
2.6.3	固有関数による境界値問題の解法	36
第 3 章	積分変換	37
3.1	Fourier 解析	37

3.1.1	Fourier 級数	37
3.1.2	余弦 Fourier 級数、正弦 Fourier 級数	40
3.1.3	複素 Fourier 級数	40
3.1.4	Fourier 積分	41
3.2	Laplace 変換	44
3.3	いくつかの関係式	46
第 4 章	Partial Differential Equation (偏微分方程式)	50
4.1	Normal Form (標準型)	50
4.2	Laplace and Poisson Equation	52
4.3	Wave Equation (波動方程式)	52
4.4	Diffusion Equation (拡散方程式)	54
4.5	Wiener-Hopf Method	59

第1章 複素関数

物理学は、実験によって得られた物理量の間に関係を見出す学問である、とも言える。測定された物理量は、例えば測定器の針の位置などから読み取られ、それらはすべて実数(より正確には有理数)である。それにもかかわらず、なぜ物理数学で複素関数論をやるのだろうか? 実数のみからなる理論ではどうして不十分なのだろうか?

それに対する答えは、この科目の講義を通じて各自考えて欲しい。

この科目の履修を終えた時点で、複素関数論がいかに美しく、物理学においてどんなに強力な道具であるか、諸君らに伝えることができれば、この講義は成功である。

逆にもし3ヶ月経っても、複素関数の便利さがちっとも感じられなかったら、この講義に毎週出席した甲斐がなかったと言うべきだ。その責任が、私にあるか諸君らにあるかは別にして…

1.1 複素数と正則関数

Keywords; 虚数単位、複素数、ガウス平面、絶対値、偏角、共役複素数、複素関数、Eulerの公式、偏角の主値、多価関数、微分、正則、Cauchy-Riemann関係式、調和関数、等角写像法、等角写像

1.1.1 複素数とその演算

$z^2 = -1$ の解の一つを i と表し虚数単位 (imaginary unit) と呼ぶ。複素数 (complex number) z とは、2つの実数 x, y と虚数単位 i を用いて

$$z = x + iy$$

のように表される数である。

実数が数直線上の1点で表されるように、複素数は実軸 (real axis) 及び虚軸 (imaginary axis) をそれぞれ横軸と縦軸に取った2次元平面上の1点で表される。この平面を複素平面 (complex plane) またはガウス平面 (Gaussian plane) と呼ぶ。

ガウス平面上の点 z から原点までの距離を $|z|$ と書き複素数 z の絶対値 (absolute value, modulus) という。点 z と原点を結ぶ直線の実軸からの角度を $\arg z$ と書き偏角 (argument) という。2つの複素数の間の4則演算、即ち、加減乗除も定義され、それらもガウス平面上に表示すると便利である。また、ある複素数の虚部の符号を変えたものを共役 (conjugate) 複素数という。

1.1.2 複素関数の例

複素関数、即ち、1つの複素数 z から他の複素数 $f(z)$ を対応づけるものには、次のようなものがある。

(1) $f(z) = z^2$

(2) べき乗関数 (power function) $f(z) = z^n$

(3) 多項式 (polynomial) $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$

(4) 有理式 (rational expression) (多項式)/(多項式)

(5) 無理式 (irrational expression) $\sqrt{z}, z^{1/3}, \dots$

(6) 指数関数 (exponential function) : 無限級数として定義

$$e^z \equiv 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \text{ について収束} \quad (1.1)$$

(7) 三角関数 (trigonometric) : 級数として定義

$$\sin z \equiv z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (1.2)$$

$$\cos z \equiv 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n} \quad (1.3)$$

式 (1.1)~(1.3) より、 $z = i\theta$ (θ は実数) のとき Euler の公式

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \theta^n = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.4)$$

が成り立つ。すなわち、 $e^{i\theta}$ は、絶対値 1、偏角 θ の複素数である。

逆に、 z の絶対値 $r = |z|$ 、偏角 θ なら $z = r e^{i\theta}$ とかける。

(8) 対数関数 (logarithmic function) : 指数関数の逆関数、即ち、 $e^w = z$ のとき、

$$\ln z = \ln(e^w) = w \quad (1.5)$$

である。 z は Euler の公式を用いて $z = |z| \exp(i \arg z)$ とかけるので、

$$w = \ln[|z| \exp(i \arg z)] = \ln |z| + i \arg z$$

となる。偏角 $\arg z$ には 2π の整数倍の不定性があるが、範囲を $(-\pi, \pi]$ に限ったものを偏角の主値 (principal value) といい $\text{Arg } z$ と書く。すると、 $\arg z = \text{Arg } z + 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) なので $\ln z$ の値は一意的に決まらない、即ち多価 (many valued) 関数である。

(9) 複素数の複素べき乗 : $a, z \in \mathbf{C}$ とすると

$$a^z \equiv \exp(z \ln a) = \exp[z (\ln |a| + i \arg a)]$$

で定義する。すると、一般には、 $(a^{z_1})^{z_2} \neq a^{(z_1 z_2)}$ となることに注意。

1.1.3 複素関数の微分と正則関数

複素関数 $f(z)$ の導関数 (derivative) は、

$$f'(z) \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}; \quad \Delta z \in \mathbf{C} \quad (1.6)$$

で定義される。

$\Delta z = re^{i\theta}$ として、右辺の極限を $\lim_{r \rightarrow 0}$ にすると、 Δz の方向、即ち θ の値によって極限の値は変わりうる。この極限が θ によらない時 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0}$ が存在し、複素関数 $f(z)$ は z で微分可能 (differentiable) という。ある領域 (domain, 連結開集合) $D \subset \mathbf{C}$ の任意の点 $z \in D$ で $f(z)$ が微分可能であるとき、 $f(z)$ は D において正則 (regular, holomorphic) であるという。

1.1.4 正則関数の満たす条件 (Cauchy-Riemann 関係式)

複素変数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$) に関する複素関数 $f(z)$ を、

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y); \quad u, v \in \mathbf{R}$$

のように表す。すると、

(i) $\Delta z = \Delta x \in \mathbf{R}$ のとき、

$$\begin{aligned} (1.6) \text{ の右辺} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.7)$$

(ii) $\Delta z = i\Delta y$ ($\Delta y \in \mathbf{R}$) のとき、

$$\begin{aligned} (1.6) \text{ の右辺} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right] \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.8)$$

故に、もし $f(z)$ が z で正則ならば、(1.7)=(1.8) なので

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \quad (1.9)$$

でなければならない。これを **Cauchy-Riemann 関係式 (Cauchy-Riemann relation)** という。

逆に、実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ が Cauchy-Riemann 関係式を満たす時には、複素関数 $f(z)$ は正則であろうか? 実は、ある領域で u, v が偏微分可能で、 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y, \dots$ が連続であれば、

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Delta y + o(\Delta x, \Delta y)$$

などと展開でき、(1.6) は Δz の取り方によらない、即ち、 $f(z)$ は正則であることを示せる。

証明： $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ とすると、

$$(1.6) \text{ の右辺} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta z} + i \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta z} \right]$$

となるが、この右辺の第一項、及び、第二項はそれぞれ

$$\text{第一項} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x, y) + (\partial u / \partial x)\Delta x + (\partial u / \partial y)\Delta y - u(x, y)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\partial u / \partial x)\Delta x - (\partial v / \partial x)\Delta y}{\Delta z}$$

$$\text{第二項} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} i \frac{(\partial v / \partial x)\Delta x + (\partial v / \partial y)\Delta y}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} i \frac{(\partial v / \partial x)\Delta x + (\partial u / \partial x)\Delta y}{\Delta z}$$

となるので、

$$\begin{aligned} (1.6) \text{ の右辺} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\partial u / \partial x)(\Delta x + i\Delta y) + (\partial v / \partial x)(i\Delta x - \Delta y)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\left((\partial u / \partial x) + i(\partial v / \partial x) \right) \Delta z}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

となり、(1.6) の極限が存在することが示される。 ■

例：複素関数とその導関数.

f	z	z^2	$1/z$	$f(g(z))$	$\operatorname{Re} z$	$ z ^2$
f'	1	$2z$	$-1/z^2$	$f'(g(z))g'(z)$	---	---

$|z|^2 = x^2 + y^2$ は $u = x^2 + y^2$ および $v = 0$ となり、Cauchy-Riemann を満たさない。

1.1.5 調和関数

Cauchy-Riemann 関係式 (1.9) より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

なので、正則関数の実部 u は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

をみたく。同様に虚部 v についても

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

となる。これらの方程式は (2次元) Laplace 方程式 (Laplace equation) とい、その解は (2次元) 調和関数 (harmonic function) という。即ち、

正則関数の実部および虚部は2次元 Laplace 方程式を満たす。

正則関数のこの性質は、適当な境界条件を満たす2次元静電問題の静電ポテンシャルを求めるのに用いることができる(等角写像法)。

1.1.6 等角写像

複素関数 $f(z)$ をある複素数 z から別の複素数 $w = f(z)$ への写像 (mapping) とみなすことができる。この写像を用いると、 z 平面上に描かれた曲線は、 w 平面上の曲線に写される。 z 平面上に描かれた任意の2本の交わる曲線のなす角と、それらを w 平面に写した曲線のなす角とが等しい時、その写像を等角写像 (conformal mapping) と言う。

定理 1.1 $f'(z) \neq 0$ の領域で、正則関数 $f(z)$ による写像 $w = f(z)$ は等角写像になる。

証明:

複素 z 平面上の曲線1と曲線2が z_0 で交わっており、 z_0 の近くの曲線1上の点を z_1 、曲線2上の点を z_2 とする。それらを $w = f(z)$ で写したものを w_0, w_1, w_2 とし、 $\Delta z_1 = z_1 - z_0$, etc とすると、2つの直線の交わる角度 θ と ϕ は

$$\theta = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1, \quad \phi = \arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1.$$

と表される (図 1.1)。一方、

$$\Delta w_1 = f(z_0 + \Delta z_1) - f(z_0) \cong \frac{df}{dz} \Delta z_1, \quad \Delta w_2 \cong \frac{df}{dz} \Delta z_2.$$

故に、もし $df/dz \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned} \phi &= \arg \left(\frac{df}{dz} \Delta z_2 \right) - \arg \left(\frac{df}{dz} \Delta z_1 \right) \\ &= \arg \frac{df}{dz} + \arg \Delta z_2 - \arg \frac{df}{dz} - \arg \Delta z_1 = \theta. \end{aligned}$$

証明終

例 1. $w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

例 2. $w = \sqrt{z}$

例 3. $w = \ln z$

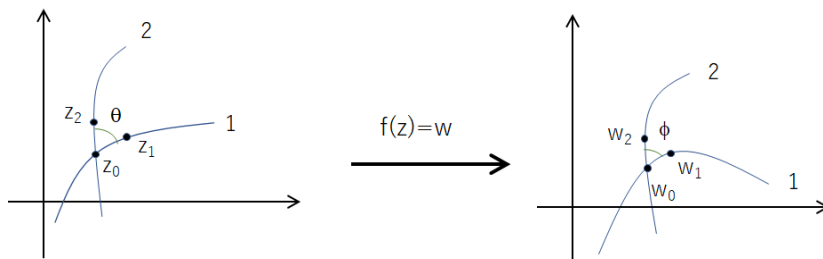


図 1.1: 正則関数 $w = f(z)$ で写される2本の曲線。

1.2 複素数の積分と Cauchy の積分定理

Keywords; 複素積分、Cauchy の積分定理、単連結領域、Cauchy の積分公式、Taylor 展開、Laurent 展開、最大値の原理、Liouville の定理、整関数、解析関数、正則部、主要部、零点、一致の定理

1.2.1 複素積分

経路 C に沿った複素関数 $f(z)$ の積分は、

$$\int_C f(z)dz \equiv \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |z_i - z_{i-1}| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

のように、線積分で定義される。経路 C が、 $\{C : z = z(s), s \in [0, 1]\}$ と書けているとき、この積分は

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 f(z) \frac{dz}{ds} ds$$

のように表される。定義より分かるように、積分の値は経路の始点 A と終点 B のみではなく途中の経路 C にもよる。

定理 1.2 (Cauchy の積分定理) $f(z)$ が単連結領域 (simply connected domain) D における正則関数の時、 D 内の任意の閉曲線 C について

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

となる。

系 1.1 $f(z)$ が単連結領域 D における正則関数の時、積分の値は経路の始点 A と終点 B のみによる。即ち、始点と終点と同じ経路 C_1 および C_2 に対して

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

証明:

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = \oint_{C_1 - C_2} f(z)dz = 0$$

証明終

即ち、この場合 $f(z)$ の不定積分 (indefinite integral) $F(z)$ が $F(z) = \int_0^z f(z')dz'$ で定義される。逆に、一般には複素関数の不定積分は定義されないことを注意しよう。

この定理 1.2 を証明する前に、2次元 Stokes の定理を示しておく。

定理 1.3 (2次元 Stokes の定理) C は閉曲線、 R は C に囲まれる単連結領域の時、

$$\iint_R \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = \oint_C (u dx + v dy)$$

証明:

積分経路 C を上半分 C_u と下半分 C_d に分けて、それぞれ $C_u: y = y_u(x)$ ($x_1 \leq x \leq x_2$), $C_d: y = y_d(x)$ ($x_1 \leq x \leq x_2$) のように表されるとする。すると、 $C = C_d - C_u$ なので、

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_d(x)}^{y_u(x)} \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx [u(x, y_u(x)) - u(x, y_d(x))] \\ &= \int_{C_u} u(x, y) dx - \int_{C_d} u(x, y) dx = - \oint_{C_d - C_u} u(x, y) dx = - \oint_C u dx \end{aligned}$$

同様に、

$$\iint_R \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \oint_C v dy$$

証明終

Cauchy の積分定理の証明 :

左辺の積分は、

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C [u(x, y) + iv(x, y)] (dx + idy) \\ &= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) \end{aligned} \quad (1.10)$$

(1.10) に Stokes の定理を用いると、

$$\oint_C f dz = \iint_R \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = 0$$

但し、最後の等号に Cauchy-Riemann 関係式を用いた。

証明終

系 1.2 (Morera の定理) 単連結領域 D で連続な複素関数 $f(z)$ が、 D 内の任意の閉曲線 C に対し $\oint_C f(z) dz = 0$ ならば、 $f(z)$ は D で正則である。

証明略

定理 1.4 (Cauchy の積分公式) $f(z)$ が単連結領域 D で正則な複素関数とすると、 $f(z)$ は

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.11)$$

と表される。但し、 C は z を左周りに一回囲む D 内の閉曲線。

即ち、正則関数の値は周りでの値が与えられれば定まる。

証明:

C_ρ を z を中心に半径 ρ の左周りの円周とする。Cauchy の積分定理より、

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

が成り立つ。 $f(z)$ は連続なので、 ρ を十分小さく取れば、任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$ とできる。但し、 ζ は C_ρ 上の任意の点。故に、

$$\begin{aligned} \left| \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| &= \left| \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \\ &\leq \oint_{C_\rho} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{\epsilon}{\rho} \oint_{C_\rho} |d\zeta| = 2\pi\epsilon \end{aligned}$$

ϵ は $\rho \rightarrow 0$ とすると、いくらでも小さくできるので、

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{C_\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

故に、(1.11) は証明された。

証明終

即ち、 C 上でのみ正則関数の値 $f(\zeta)$ が与えられているとき、 C の内部でのその関数 $f(z)$ の値が (1.11) によって求められる。その関数の導関数は、

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

で与えられ、確かに $f(z)$ は C 内部で微分可能であることが分かる。同様に、 n 階導関数も

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

によって与えられる。即ち、正則関数の導関数も正則、これを繰り返すと

正則関数は無限階微分可能である

ことが分かる。

系 1.3 (最大値の原理) $f(z)$ が領域 D で正則な関数でかつ定数でないとする。そのとき、 $|f(z)|$ は D の内部でその最大値に達することはない。

証明:

(あらすじ) 仮に、内部の点 $z = z_0$ で最大値 $|f(z_0)| = M$ になったとする。すると、

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{M}{|\zeta - z_0|} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r} 2\pi r = M$$

となり不合理。

証明終

無限遠点を除く全複素平面で正則な関数を**整関数 (entire function)** という。

系 1.4 (Liouville の定理) 有界な整関数は定数である。

証明:

Cauchy の積分公式より、整関数に対しては任意の複素数 a に対して

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

が成り立つ。今、積分路 C を a を中心とする半径 r の円とる。 $f(z)$ は有界なので、任意の z に対して $|f(z)| < M$ となる M が存在するので、

$$|f'(a)| < \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z)|}{|z-a|^2} |dz| < \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

即ち、任意の a に対して $f'(a) = 0$ が示される。故に、複素関数 $f(z)$ は定数。証明終

$\varepsilon - \delta$ 論法:

数学では、極限の議論をする時に、以下のようないわゆる $\varepsilon - \delta$ 論法がよく用いられる。例えば、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

即ち、 $x \rightarrow a$ の時、 $f(x)$ が b に収束するということを、 $\varepsilon - \delta$ 論法では

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - b| < \varepsilon$ となるような δ が存在する。

という。更に略して、

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して、} \exists \delta : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

のように記述する。

もう一つの例を上げると、点列 $\{z_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ が $n \rightarrow \infty$ で a に収束する、即ち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

は

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して、} \exists N : n > N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$$

と表現される。

1.2.2 Taylor 展開と Laurent 展開

複素関数 $f(z)$ をある複素数 a の周りに $(z-a)$ のべき級数で表すと便利なおことがある。 $(z-a)$ の正のべきのみによるべき級数展開を Taylor 展開、負のべきを含むべき級数展開を Laurent 展開という。

Taylor 展開

複素関数 $f(z)$ は $z=a$ で正則とする。 z_1 を $f(z)$ が正則でない点のうち a に最も近い点とし、 $\rho < |z_1 - a|$ とする。すると、 a を中心とする半径 ρ の円周 C_ρ およびそれを含むある単連結領域で $f(z)$ は正則なので、Cauchy の積分公式より C_ρ の内部の点 z に対し

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

と書ける。 ζ は C_ρ の上にあるとき $|(z-a)/(\zeta-a)| < 1$ に注意すると、 $1/(\zeta-z)$ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} \\ &= \frac{1}{\zeta - a} \cdot \left[1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

のように、 $(z-a)/(\zeta-a)$ の級数で表されることが分かる。この級数は、絶対収束 (absolutely convergent)、かつ、 ζ について一様収束 (uniformly convergent) するので、項別積分することが出来る。即ち、 $f(z)$ は正則な領域 C_ρ 内で

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + \frac{z-a}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} d\zeta + \frac{(z-a)^2}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^3} d\zeta + \dots \\ &= f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{1}{2} f''(a)(z-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \end{aligned}$$

のように展開できる。この展開を Taylor 展開 (Taylor expansion) という。この級数の収束半径は $|z_1 - a|$ である。Taylor 展開できることを解析的 (analytic) と言い、Taylor 展開できる関数を解析関数 (analytic function) という。即ち、“正則” と “解析的” はほぼ同義に使われる。

Laurent 展開

上の Taylor 展開は、半径 $|z_1 - a|$ の円の外では収束しない。また、複素関数 $f(z)$ が $z=a$ で正則でないときには Taylor 展開はできない。そこで、一般に $f(z)$ の正則でない点を含む円の外で収束する展開はどのようなものになるかを考えよう。

$f(z)$ が、 a を中心とする同心円 C_1 と C_2 およびその間を含むある領域で一価正則とする。 z を C_1 と C_2 の間にある点とし、更に z を囲み C_1 と C_2 の間に含まれ

る閉曲線を C_3 とすると、Cauchy の積分公式及び積分定理を用いて $f(z)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1 - C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned}$$

ここで、 C_1 上では $|\zeta - a| > |z - a|$ に注意すると

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n$$

となる。また、 C_2 上では $|\zeta - a| < |z - a|$ なので、

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(z - a) - (\zeta - a)} = -\frac{1}{z - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n$$

となる。これらの級数を用いると $f(z)$ は次式のように展開できる。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} \quad (1.12)$$

ただし、 c_n 及び c_{-n} は

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \\ c_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta \end{aligned}$$

で与えられる。(1.12) 式のような形をした展開を **Laurent 展開 (Laurent expansion)** という。Laurent 展開の収束半径は $\rho < |z - a| < R$ のように表され、そこで級数は一価正則である。逆に、このような領域で一価正則な関数は、Laurent 展開できる。

Laurent 展開において、 c_n を含む級数を正則部 (**holomorphic part**)、 c_{-n} を含む級数を主要部 (**principal part**) という。両者を一つの級数で表すと、

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

と書ける。但し、閉曲線 C は、 C_2 に囲まれる $f(z)$ の正則でない点をすべて囲む。

1.2.3 零点と一致の定理

上に示した、「正則関数は正のべき級数展開 (Taylor 展開) できる」という性質から、以下に示すように、「一致の定理」という正則関数のきわだった性質が導かれる。

正則関数 $f(z)$ の値が 0 となる点を **零点 (zero point)** という。 a を零点 $f(a) = 0$ とすると、Taylor 展開の初項 $c_0 = 0$ である。 $f(z)$ の a のまわりの Taylor 展開が

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots \equiv (z-a)^n g(z)$$

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{n+m}(z-a)^m$$

となるとき、 a は $f(z)$ の n 位の (**n -th order**) 零点という。

定理 1.5 (一致の定理) $f(z)$ と $g(z)$ を領域 D で共に正則な関数とする。 f と g の値が、 D 内のある 1 つの点 a を集積点¹とするある点列 $\{z_k\}$ 上で等しければ、 2 つの関数 $f(z)$ 、 $g(z)$ は D の全領域で一致する。

証明:

$h(z) \equiv f(z) - g(z)$ とする。 $h(z)$ は連続で $h(z_k) = 0$ なので $h(a) = 0$ 、 即ち、 $z = a$ は $h(z)$ の零点である。 仮にそれが n 位の零点とすると、

$$h(z) = (z-a)^n \phi(z); \quad \phi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \dots$$

となり、 $z = a$ の近傍で $h(z) \neq 0$ のはず。 しかしこれは $h(z_k) = 0$ と矛盾する。 この矛盾は $c_n \neq 0$ となる n が存在するとしたために生じた。 故にすべての n に対して $c_n = 0$ でなければならない、 つまり $h(z) \equiv 0$ でなければならない。 この展開は明らかに収束半径無限大なので、 D 全域で $h(z) = 0$ となる。 証明終

1.3 特異点と留数

Keywords; 特異点、 除去可能な特異点、 極、 真性特異点、 Weierstrass-Casorati の定理、 留数、 留数定理

1.3.1 特異点

複素関数 $f(z)$ が正則でない点を **特異点 (singularity)** という。 特異点 $z = a$ が孤立している場合、 即ち、 $0 < |z-a| < \delta$ で $f(z)$ が正則な場合を考える。 孤立特異点 (**isolated singularity**) としては、 以下のように (i) 除去可能な特異点 (**removable singularity**)、 (ii) 極 (**pole**)、 (iii) 真性特異点 (**essential singularity**) の 3 つの場合がある。 (そのほかに分岐点でも関数は正則でないが、 それは後述する。)

$f(z)$ の孤立特異点 a のまわりの Laurent 展開を

$$f(z) = \underbrace{\dots + \frac{c_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)}}_{\text{主要部}} + \underbrace{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots}_{\text{正則部}}$$

とする。

¹点 a が点集合 A の集積点 (**accumulation point, limit point**) とは、 a の任意の (小さな) 近傍にも A に含まれる点が無限個存在するということ。 この場合、 A の部分集合で a に収束する点列 $\{z_n : z_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots\}$ が存在する。

(i) 除去可能な特異点: 主要部がない場合。

$$\text{例 } f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

(ii) 極: 主要部が有限項の場合。 $c_{-k} \neq 0$ である最大の k が n のとき、 a は n 位の極という。 $n = 1$ のとき単純極という。この場合、

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$$

である。また、

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = \begin{cases} \infty & (k < n) \\ c_{-n} \neq 0 & (k = n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

の時、 $z = a$ は $f(z)$ の n 位の極であることが分かる。

(iii) 真性特異点: 主要部が無限項からなる場合。この場合、以下の Weierstrass-Casorati の定理が成り立ち、 $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ は特定の値に収束しない。

定理 1.6 (Weierstrass-Casorati の定理) a を $f(z)$ の孤立真性特異点とする。このとき、 a に収束する点列 $\{z_k\}$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$) を適当に選ぶことによって、任意の複素数 ω に対して $f(z_k) \rightarrow \omega$ とすることもできるし、 $|f(z_k)| \rightarrow \infty$ とすることもできる。

証明略

例. $f(z) = \exp(1/z)$ とすると、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

だから、 $z = 0$ は真性特異点。

- $\{z_k\}$ を実軸の正の方から 0 に近づく点列 $\{x_k\}$ ($x_k > 0$) とする。すると、

$$f(x_k) = \exp(1/x_k) \rightarrow \infty$$

- $\{z_k\}$ を実軸の負の方から 0 に近づく点列 $\{-x_k\}$ ($x_k > 0$) とする。すると、

$$f(-x_k) = \exp(-1/x_k) \rightarrow 0$$

- 任意の複素数 $\omega \equiv r e^{i\theta}$ にたいして、 $z_k = 1/(\ln r + i(\theta + 2\pi k))$ と取ると、 $z_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) でかつ、

$$f(z_k) = \exp(\ln r + i(\theta + 2\pi k)) = \exp(\ln r + i\theta) = r e^{i\theta} = \omega$$

1.3.2 留数

$0 < |z - a| < \delta$ で収束する $f(z)$ の a のまわりの Laurent 展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

とすると、 c_{-1} を $f(z)$ の $z = a$ における留数 (residue) といい、ここでは $\Re\text{es}(a; f)$ と表すことにする。ゼロでない留数は特異点にしかない。

定理 1.7 (留数定理) 複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C の内部の n 個の孤立特異点 a_1, a_2, \dots, a_n を除いて正則であるとき、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \Re\text{es}(a_k; f)$$

である。すなわち、左辺の積分は C で囲まれる特異点の留数の和で与えられる。

証明:

C_k を a_k を中心とする円周とし、その内側にある特異点は a_k だけであるとすると、すると Cauchy の積分定理により、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z) dz$$

と書ける。 $f(z)$ の a_k の周りの展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^k (z - a_k)^n$$

とすると、 C_k の積分は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^k \oint_{C_k} (z - a_k)^n dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^k \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} i r e^{i\theta} dz = b_{-1}^k = \Re\text{es}(a_k; f) \end{aligned}$$

となる。但し、途中の変形で積分変数の変換 $z - a_k = r e^{i\theta}$, $dz = r e^{i\theta} i d\theta$ を用いた。 証明終

命題 1.1 $f(z)$ の極 a での留数は、

(i) a が単純極ならば $\Re\text{es}(a; f) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$

(ii) a が m 位の極ならば $\Re\text{es}(a; f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$

で与えられる。

証明略

例 1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$ ($a > 0$) は留数定理を用いて以下のように計算できる。

求める積分は $\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz$ と書ける。この被積分関数を複素関数と見なすと、 $z = -ia$ と $z = +ia$ に 1 位の極がありその留数はそれぞれ $-e^{-a}/2ia$ と $e^{-a}/2ia$ である。経路 C_1 を実軸の $-R$ から R までの線分、経路 C_2 を原点を中心とした半径 R の左回りの円周の上半面にある部分とする。但し、 R は十分大きな正の実数とする。すると、経路 $C \equiv C_1 + C_2$ は被積分関数の極 $z = ia$ を囲む閉曲線になるので、 C に沿っての積分は留数定理を用いて、

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-a}}{2ia} \right) = \pi \left(\frac{e^{-a}}{a} \right) \quad (1.13)$$

のように計算できる。この左辺は

$$\text{左辺} = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz \quad (1.14)$$

であるが、この第 2 項は以下のように $R \rightarrow \infty$ の極限でゼロとなることが示せる。即ち、十分大きな $|z|$ に対して

$$\left| \frac{1}{z^2 + a^2} \right| < \frac{M}{|z|^2}$$

となる $M (> 0)$ が存在するので、第 2 項の絶対値は以下のように上限を押しえられる。

$$|\text{第 2 項}| = \left| \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz \right| \leq \int_{C_2} \left| \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz \right| < M \int_{C_2} \left| \frac{e^{iz}}{z^2} dz \right|$$

C_2 は半円なので、 $z = Re^{i\theta}$ と積分変数を z から θ に変換すると、

$$\begin{aligned} |\text{第 2 項}| &< M \int_0^\pi \left| \frac{e^{iR \cos \theta - R \sin \theta}}{R^2 e^{2i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \right| \\ &= M \int_0^\pi \frac{e^{-R \sin \theta}}{R} d\theta = 2 \frac{M}{R} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{の時} \quad \frac{2}{\pi} \theta \leq \sin \theta \leq \theta; \quad (\text{Jordan の不等式})$$

に注意すると、更に

$$|\text{第 2 項}| < 2 \frac{M}{R} \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = 2 \frac{M}{R} \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

(1.14) 式の第 1 項の実部は $R \rightarrow \infty$ の極限で求める積分に収束するので、この極限で (1.13) の両辺の実部を取って、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{ae^a}$$

を得る。

問 1. A 君は、上の例にある積分を計算するのに次のようにした。間違いを指摘せよ。

被積分関数 $\frac{\cos z}{z^2 + a^2}$ の極 $z = -ia$ と $z = +ia$ における留数は、それぞれ $-\cos(-ia)/2ia$ と $\cos(ia)/2ia$ である。例と同じ積分路 C でこれを積分すると、 $z = +ia$ の留数のみを囲むので、

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \frac{\cos(ia)}{2ia}$$

となる。左辺のうち C_2 の部分での積分は $R \rightarrow \infty$ の極限でゼロになるので、求める積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \cos ia}{a} = \frac{\pi \cosh a}{a}$$

である。

問 2. 次の積分を示せ。

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{|a|} \quad (2) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

1.4 解析接続と Riemann 面

Keywords; Riemann 面、解析接続、直接解析接続、自然境界、関数要素、分岐点、切断、代数的分岐点、対数的分岐点

1.4.1 解析接続

領域 D_0 で正則な複素関数 f_0 と領域 D_1 で正則な複素関数 f_1 があったとする。2つの領域 D_0 と D_1 は互いに重なり合うが異なり、 D_1 は D_0 に含まれない点を含むとする。 D_0 と D_1 の共通部分 $D_0 \cap D_1$ で、 f_1 が f_0 に等しいとき、即ち

$$f_1(z) = f_0(z); \quad z \in D_0 \cap D_1$$

のとき、複素関数 f を

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{if } z \in D_0 \\ f_1(z) & \text{if } z \in D_1 \end{cases}$$

とすると、 $D \equiv D_0 \cup D_1$ で正則な関数 f を定義できる。これを、“ f_0 (または f_1) を D に解析接続 (analytic continuation) した” という。一致の定理により解析接続の一意性、即ち、与えられた $f_0(z)$ に対して上の条件を満たす $f_1(z)$ は一意的であることは保証される。

具体的に、与えられた f_0 に対して f_1 を求める方法としては以下の2つの方法がある。

I. 直接解析接続 (べき級数による方法、真面目な方法)

まず、 $a_0 \in D_0$ のまわりで f_0 を Taylor 展開する。その収束領域 D_1 が D_0 に含まれていなければ、その級数表現によって f_1 を定義すると、 f_0 は $D_0 \cup D_1$ まで接続できる。 f_1 に対して同じことを、 $a_1 \in D_1$ の周りで行なうことにより D_2 で定義された f_2 を作ることが出来る。これを繰り返すことにより次々と定義域を広げ解析関数 f を定義できる。このようなべき級数による解析接続を直接解析接続 (direct analytic continuation) という。これらの、 f を定義するための個々のべき級数を f の関数要素 (function element) という。このような解析接続が何処までも必ず実行できるわけではなく、これ以上接続できないという境界線、自然境界 (natural boundary) が現われることがある。これは、この境界上にもとの関数の特異点が稠密に並んでいるからで、その為それを越えて解析接続できないのである。

例.

$$f_0(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \dots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

で定義される関数 f_0 を解析接続することを考える。この関数の定義域 D_0 は級数の収束域で与えられるので、 $D_0 = \{z; |z| < 2\}$ である。これを $z = -1 \in D_0$ のまわりで、即ち $(z+1)$ のべきで Taylor 展開する。そのために、 $z = (z+1) - 1$ と置き換えると

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \frac{1}{2} + \frac{(z+1) - 1}{2^2} + \frac{\{(z+1) - 1\}^2}{2^3} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(z+1) - 1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} (z+1)^k (-1)^{n-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (z+1)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (z+1)^k 2^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

ここで最後の級数は以下のことに注意すると計算できる。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

の両辺を k 階微分すると

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

となり、右辺は求める級数になる。一方、左辺の微分を実行すると $k!/(1-x)^{k+1}$ となる。故に、

$$f_0(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (z+1)^k 2^{-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{3}\right)^k \equiv f_1(z)$$

この f_1 の収束域は $D_1 = \{z; |z+1| < 3\}$ であり、 D_0 に含まれない。

II. 知られている関数で表す方法

例. 上の例の f_0 は

$$f_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{2-z}$$

と表され、直ちに $z=2$ を除く全複素平面に解析接続できる。

1.4.2 Riemann 面

領域 D_0 と D_1 が連結していない2つの部分 A および B で重なり合っているとす。 D_0 で定義されている正則関数 f_0 と D_1 で定義されている正則関数 f_1 が A で等しく、 f_0 を $D_0 \cup D_1$ へ解析接続できた場合でも、一般には B で f_0 と f_1 が等しいとは限らない。即ち、解析接続された関数 f は B 上で2価関数となっていることがある。そのような場合、 B に対してはもう一枚別の複素平面を用意して、2枚の複素面上での1価関数を定義したほうが都合がよい。このように、多価関数を扱う場合に、考えている複素関数の性質にしたがって定義された多葉な複素平面を **Riemann 面 (Riemann surface)** といい、Riemann 面を構成するそれぞれの複素平面を分岐 (**branch**) という。

例 1. $f(z) = z^{1/2}$ を考える。 $z = re^{i\theta}$ とすると、偏角には 2π の整数倍の不定性があり $z = re^{i(\theta+2\pi)}$ としてもよいので、

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad \text{または} \quad \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

となり $f(z)$ は2価関数である。これはもちろん、よく知られた平方根の±の2価性である。この関数の Riemann 面は $z=0$ を共有する2枚の複素平面からなり、原点を一周するごとに2枚の間を連続的に乗り移る。Riemann 面で複数の複素平面が接している点(この場合は原点)を分岐点 (**branch point**) という。1つの複素平面から他の複素平面へ乗り移る為の仮想的な切れ目を分岐点から引くことが出来るが、それは切断 (**cut**) と呼ばれている。切断のとり方はある程度自由で、この例では切断を原点から無限遠へ伸びる任意の半直線に取ることが出来る。偏角 θ を主値にとると、 $z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ は2つの分岐のうち実部が正の分岐を与え、実軸の負の部分に切断が現れる。

例 2.

$$f(z) = z^{1/3} = r^{1/3}e^{i\theta/3}, \quad r^{1/3}e^{i(\theta/3+2\pi/3)}, \quad r^{1/3}e^{i(\theta/3+4\pi/3)}$$

この Riemann 面は $z=0$ を共有する3枚の複素平面からなり、原点を一周するごとに3枚の間を順に連続的に乗り移る。3回原点を回るともとの面に戻る。

例 3.

$$f(z) = \ln z = \ln r + i(\theta + 2n\pi); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

この Riemann 面は $z = 0$ を共有する無限枚の複素平面からなり、原点を一周するごとにそれらの間を順に乗り移る。

例 1 や例 2 のように有限葉の Riemann 面の分岐点を代数的分岐点 (**algebraic branch point**) と言い、その回りで乗り移る Riemann 面の枚数を重複度 (multiplicity) という。例 3 のように無限葉の Riemann 面の分岐点是对数的分岐点 (**logarithmic branch point**) という。

問. $f(z) = (z^2 - 1)^{-1/2}$ の Riemann 面はどのような構造をしているか。

第2章 常微分方程式

2.1 微分方程式

Keywords; 常微分方程式、偏微分方程式、線形、非線形、積分定数、一般解、特殊解、特異解

一変数関数 $y(x)$ 及びその n 階までの導関数に対して

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

のような関係が成り立っているときこの方程式を n 階常微分方程式 (**ordinary differential equation**) という。それに対して、例えば $u(x, y)$ のような多変数関数、及びその偏導関数 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, などに関する方程式は、偏微分方程式 (**partial differential equation**) と呼ばれている。

n 階常微分方程式が

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.1)$$

のような形に書かれていたとする。 f が $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ について一次関数の場合には (2.1) は線形 (**linear**) であると言われる。それに対して、2 次以上の項を含む場合には方程式は非線形 (**non-linear**) である。

“微分方程式を解く” とは (2.1) を満たす $y = y(x)$ を求めることである。その際、任意の値を取っても方程式を満たす積分定数 (**integral constant**) が現われる。(2.1) の解のうち n 個の積分定数を含む解を一般解 (**general solution**) といい、一般解の中のいくつかの積分定数に特別な値を入れたものを特殊解 (**particular solution**) という。物理的には、積分定数は初期条件や境界条件によって決められる。そのほかに、一般解の中の積分定数を変化させたときの解曲線群の包絡線も解になっているが、それは一般解でも特殊解でもない。一般解でも特殊解でもない解は、特異解 (**singular solution**) と呼ばれている。

例. $y'' + y^2 = 1$ の一般解は $y = \sin(x + C)$ である。 C は積分定数。
そのほかに、 $y = \pm 1$ も明らかに解であるが、これは一般解の C をどのようにとっても得られないので特異解である。

物理学の研究をしていると様々な微分方程式に遭遇する。しかし、その解が知っている関数で表される (初等関数の組合せで書ける) という意味で解けることはほとんどない! “方程式が解けないときにどうしたらよいか” ということに日々頭を悩ましているのがほとんどの物理学者であろう。一般的な方法としては、ある値のまわりに級数展開をして解を求める級数解法、方程式などに何らかの近似を行なって解く近似解法、計算機を用いて数値的に解く数値解法などがよく用いられる。

2.2 一階常微分方程式

Keywords; 変数分離形、同次形、完全微分形、積分因子、同次式、非同次式、定数変化法

一階常微分方程式は $y' = f(x, y)$ の形に書ける。一般的な解法はないが、いくつかの場合には解ける。以下に、その代表的な例を挙げる。(このほかにも解ける場合は色々ある。文献参照のこと。)

(1) 変数分離形; $y' = f(x)g(y)$ の形の微分方程式を変数分離形といい、 $\int \frac{dy}{g} = \int f dx + C$ のように簡単に解ける。但し、この積分が実際に実行できるかどうかは別問題。

例. $y' = y^2 - 1$

(2) 同次形; $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ の形の微分方程式。 $y = ux$ と変数変換し y を消す。
 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ なので、もとの方程式は

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u), \quad \text{即ち} \quad \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

と変数分離形に変形できる。故に解は、

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C = \ln|x| + C$$

となる。

例. $y + 2xy' = 0$

(3) 完全微分形; $P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$ の形の微分方程式で $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ を満たす場合。

このとき $P = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ となるような ϕ が存在する。具体的な $\phi(x, y)$ の形は次のようにして求められる。 $\phi(x, y) = \int_{x_0}^x P dx + Y(y)$ とおくと、

$$\begin{aligned} Q(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{dY}{dy} = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{dY}{dy} \\ &= Q(x, y) - Q(x_0, y) + \frac{dY}{dy} \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{dY}{dy} = Q(x_0, y), \quad \text{即ち} \quad Y(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

となり、結局 ϕ の形としては

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

と求められる。但し、 x_0, y_0 は任意であり、ゼロと取ることができる。

元の微分方程式を ϕ を用いて表すと、

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 0$$

となるので、解は $\phi(x, y) = \text{const.}$ 、即ち、

$$\int_0^x P(x, y)dx + \int_0^y Q(x = 0, y)dy = C$$

と求められる。但し、 C は積分定数。

例.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \frac{dy}{y} = 0$$

この方程式では、 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ なので、これは完全微分形であり、 $\phi(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$ となる。

この例で注意して欲しいのは、

“もし両辺に $\sqrt{x^2 + y^2}$ がかかって $dx + (\sqrt{x^2 + y^2} - x)\frac{dy}{y} = 0$ となっていれば、これは見かけ上は完全微分形ではない”、

ということである。即ち同じ方程式でも、ある関数をかけると完全微分形になったりならなかったりする。このように、両辺にかけると微分方程式が完全微分形になる関数を積分因子 (**integrating factor**) という。与えられた微分方程式に対して積分因子をどうやって求めるか、ということについても多くのテクニックがある。(参考書を参照せよ。)

(4) 一階線型常微分方程式 (**first order linear ordinary differential equation**);

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (2.2)$$

の形の微分方程式。 $Q(x) \neq 0$ の場合、非同次 (**inhomogeneous**) 方程式と呼ばれており、ある (2.2) に対して $Q(x) = 0$ とおいたもの

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (2.3)$$

を (2.2) の同次 (**homogeneous**) 式という。(2.2) 解の構造が、

$$\boxed{(2.2) \text{ の一般解}} = \boxed{(2.3) \text{ の一般解}} + \boxed{(2.2) \text{ の特殊解}} \quad (2.4)$$

のようになっていることは重要である。

(2.3) は変数分離形なのでその一般解は直ちにもとまり、

$$y(x) = C \exp\left(-\int P(x)dx\right)$$

となる。

(2.2) の一般解を求めるには定数変化法 (**method of variation of constant**) を用いる。即ち、(2.3) の一般解の積分定数 C を x の関数に置き換えたもの、

$$y(x) = C(x) \exp\left(-\int P(x)dx\right)$$

で (2.2) の解がかけると予想して $C(x)$ を求める。上式を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \exp\left(-\int P(x)dx\right) - P(x)C(x) \exp\left(-\int P(x)dx\right)$$

なので (2.2) に代入すると $C(x)$ に対する方程式

$$\frac{dC}{dx} \exp\left(-\int P(x)dx\right) = Q(x), \quad \text{即ち} \quad \frac{dC}{dx} = Q(x) \exp\left(\int P(x)dx\right)$$

が得られ、これは直ちに解けて、

$$C(x) = \int Q(x) \exp\left(\int P(x)dx\right) dx + A$$

となる。但し A は積分定数。これを用いると (2.2) の一般解は

$$y(x) = \exp\left(-\int P(x)dx\right) \left\{ \int Q(x) \exp\left(\int P(x)dx\right) dx + A \right\}$$

と求められる。この解は (2.4) の形になっていることに注意。

例. $y' - \lambda y = f(x)$

2.3 n階線型常微分方程式

Keywords; 線型演算子、基本系、Wronski 行列式、重ね合わせの原理、定数係数同次線形常微分方程式、特性方程式、一次独立

n 階線型常微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + a_2(x) \frac{d^{(n-2)}y}{dx^{(n-2)}} + \dots + a_n(x)y = f(x) \quad (2.5)$$

を考える。これに対する同次方程式は

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + a_2(x) \frac{d^{(n-2)}y}{dx^{(n-2)}} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad (2.6)$$

である。これらの方程式は線型演算子 (**linear operator**)

$$\mathbf{L} \equiv \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} + a_2(x) \frac{d^{(n-2)}}{dx^{(n-2)}} + \dots + a_n(x)$$

を用いると、それぞれ

$$\mathbf{L}y = f(x), \quad \mathbf{L}y = 0$$

のように表される。

線型演算子とは一般的に次のような性質を持つ演算子を言う。即ち、

$$\begin{cases} \mathbf{L}(y_1 + y_2) = \mathbf{L}y_1 + \mathbf{L}y_2 \\ \mathbf{L}cy_1 = c\mathbf{L}y_1 \end{cases} \iff \mathbf{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathbf{L}y_1 + c_2\mathbf{L}y_2$$

但し、 y_1, y_2 は任意の関数で c_1, c_2 は任意の定数。

n 階線型常微分方程式の解の一般的な性質として、次のようなものが重要である。

- (i) y_1, y_2 が (2.6) の解ならば、 $c_1y_1 + c_2y_2$ も (2.6) の解。これを重ね合わせの原理 (**principle of superposition**) という。
- (ii) (2.6) の一次独立な解は n 個あり、それを解の基本系 (**fundamental system of solutions**) という。解の基本系を $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ とすると、(2.6) の一般解は

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$$

とかける。但し、 c_1, c_2, \dots, c_n は積分定数。

- (iii) 解の基本系 $\{y_i\}$ を用いて定義される、次の **Wronski 行列式 (Wronskian)** は決してゼロにはならない。

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

証明 $y_i^{(n)} + a_1y_i^{(n-1)} + \dots + a_ny_i = 0$ なので、

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n)} \\ y_2 & \dots & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & \dots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -a_1(x)\Delta$$

この方程式は変数分離形なのですぐ解けて

$$\Delta(x) = C \exp\left(-\int_0^x a_1(x)dx\right)$$

となるので、 $\Delta(x)$ は常にゼロ ($C = 0$) か常にゼロでない ($C \neq 0$) かどちらかである。 $\{y_i\}$ は一次独立なので常にゼロではありえない。証明終

- (iv) y_0 が (2.5) の特解であれば (2.5) の一般解は

$$y = y_0 + c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$$

とかける。

解の性質 (iv) から非同次方程式の一般解を求めるには、まず同次方程式の独立な解 n 個 (解の基本系) を求めて、次に非同次方程式の特解を一つ求めればよいことが分かる。

2.3.1 定数係数の同次線形常微分方程式

一般の線形常微分方程式に対して解の基本系を求めるのは必ずしも容易でないが、定数係数の同次線形常微分方程式に対しては一般的な処方箋がある。

解くべき方程式は

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \dots + a_n y = 0 \quad (2.7)$$

と表される。但し、 a_i は定数である。この方程式には $y = e^{\lambda x}$ の形の解があることに注意する。これを (2.7) に代入すると λ についての n 次の代数方程式

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2.8)$$

を得る。これを特性方程式 (characteristic equation) という。

(i) 特性方程式の n 個の解 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ が全て異なる場合 解の基本系は

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

で与えられる。故に、(2.7) の一般解は

$$y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x}$$

となる。 λ_1 が複素数の時には、 $\lambda_1 = a + ib$ とすると、解 $e^{\lambda_1 x}$ は

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

と表されることに注意。

(ii) 特性方程式が重根を持つ場合 λ_1 が m 重根の時、それに対応する基本解は

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_1 x}$$

証明略

例. 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$ なので、その解 $\lambda = a$ は 2 重根である。一つの解は $y = e^{ax}$ であるが、もう一つの解は定数変化法を用いて $y = c(x)e^{ax}$ の形にして求める。もとの微分方程式にこれを代入すると、 $c'' = 0$ を得、 $c(x) = c_0 + c_1 x$ となるので、一般解は $y = (c_0 + c_1 x)e^{ax}$ で与えられる。即ち、解の基本系は $e^{ax}, x e^{ax}$ である。

2.3.2 非同次線形常微分方程式

既に述べたように、定数係数以外の一般の線形常微分方程式の解の基本系を求めるのは容易ではない。しかしもし解の基本系が求めたとすれば、非同次方程式の特解は (従って一般解も) 以下のようにして求められる。

一般の非同次線形常微分方程式を

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \dots + a_n(x)y = f(x), \quad \text{或いは} \quad \mathbf{L}y = f(x) \quad (2.9)$$

と表し、その解の基本系を $\{y_i(x): i = 1, \dots, n\}$ とする。非同次方程式 (2.9) の解を定数変化法を用いて

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i(x) \quad (2.10)$$

と仮定する。ここで n 個の関数 $c_i(x)$ は未知関数である。これを元の方程式 (2.9) に代入することによって $c_i(x)$ の間の関係式が一つ求まるが、 n 個の $c_i(x)$ を決定するにはあと $n-1$ 個の関係式が必要である。これらは以下のようにして決めると都合がよい。即ち、(2.10) を微分すると、

$$\frac{d}{dx}y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{d}{dx}y_i(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dx}y_i(x)}_{=0}$$

となるが、右辺第二項の和をゼロにする、即ち、

$$\sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dx}y_i(x) = 0 \quad (2.11)$$

という条件を課す。すると、(2.10) の二階導関数は

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{d^2y_i}{dx^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dx} \frac{dy_i}{dx}}_{=0}$$

となるが、上と同様に右辺第二項の和をゼロにする、即ち、

$$\sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dx} \frac{dy_i}{dx} = 0 \quad (2.12)$$

という条件を更に課す。以下同様にして行き、最後に (2.10) の $n-1$ 階導関数

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dx} \frac{d^{n-2}y_i}{dx^{n-2}}}_{=0}$$

について $n-1$ 番目の条件

$$\sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dx} \frac{d^{n-2}y_i}{dx^{n-2}} = 0 \quad (2.13)$$

を課す。すると、 n 階導関数は

$$\frac{d^n}{dx^n}y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{d^n y_i}{dx^n} + \sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dx} \frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}$$

となるので、 $\mathbf{L}y_i = 0$ に注意しつつこれらの導関数を (2.9) に代入すると

$$\sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dx} \frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}} = f(x) \quad (2.14)$$

を得る。この式 (2.14) 及び $n - 1$ 個の条件 (2.11), (2.12), ..., (2.13) が $c_i(x)$ を決める連立微分方程式を与える。これらを行列の形に書くと

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

となる。左辺の行列を $(Y_{i,j})$ と書くとその逆行列は $Y_{i,j}^{-1} = \Delta_{i,j}/|Y|$ で与えられる。ここで $\Delta_{i,j}$ は行列 Y の余因子であり、 $|Y|$ は Y の行列式、今の場合は Wronski 行列式 Δ である。これを用いて、(2.15) を逆に解くと

$$c_i'(x) = Y_{i,n}^{-1} f(x) = \frac{\Delta_{i,n}}{\Delta} f(x)$$

即ち、

$$c_i(x) = \int_0^x \frac{\Delta_{i,n}(u)}{\Delta(u)} f(u) du + A_i$$

と解ける。これを (2.10) に代入すると (2.9) の解として、

$$y(x) = \sum_{i=1}^n A_i y_i(x) + \sum_{i=1}^n y_i(x) \int_0^x \frac{\Delta_{i,n}(u)}{\Delta(u)} f(u) du$$

が得られる。ここで右辺第一項は同次方程式の一般解になっていることに注意。

例. 変数を時間 t として

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = f(t)$$

を解く。これは一般の外力 $f(t)$ を受けているときの減衰振動の方程式である。特性方程式 $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$ の解 $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ を α_1, α_2 とすると、解の基本系は $y_1 = e^{\alpha_1 t}, y_2 = e^{\alpha_2 t}$ となる。ここで、Wronski 行列式

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1 t} & \alpha_1 e^{\alpha_1 t} \\ e^{\alpha_2 t} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t} = -2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} e^{-2\gamma t} \neq 0$$

に注意。(解の性質 (iii))

解くべき方程式の解を $y(t) = c_1(t)e^{\alpha_1 t} + c_2(t)e^{\alpha_2 t}$ と置く。 $c_i(t)$ に課せられるべき条件、及び解の形を元の方程式に代入した式は、夫々

$$\begin{aligned} c_1' e^{\alpha_1 t} + c_2' e^{\alpha_2 t} &= 0 \\ \alpha_1 c_1' e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 c_2' e^{\alpha_2 t} &= f(t) \end{aligned}$$

なので、これらを解くと

$$c_1'(t) = \frac{f(t)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_1 t}, \quad c_2'(t) = -\frac{f(t)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_2 t}$$

即ち

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \int_0^t \frac{f(u)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1(t-u)} du - \int_0^t \frac{f(u)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2(t-u)} du \\ &\equiv y_0(t) + \int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} e^{-\gamma(t-u)} \sinh \left[\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}(t-u) \right] du \end{aligned}$$

2.4 2階線形常微分方程式の級数解法

Keywords; 常微分方程式の正則点、特異点、Fuchs の定理、Fuchs 型常微分方程式、確定特異点、不確定特異点、決定方程式、Frobenius の方法

2.4.1 常微分方程式の正則点

2階線型常微分方程式

$$Ly = \frac{d^2y}{dx^2} + A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y = C(x) \quad (2.16)$$

を考える。\$A, B, C\$ が全て解析的、即ち、べき級数展開可能な点をこの常微分方程式の正則点という。正則でない点を特異点 (singular point) という。

定理 2.1 \$x = a\$ が常微分方程式 (2.16) の正則点ならば、その解は全て \$x = a\$ で解析的である。

証明略

定理の条件が成り立つとき (2.16) を具体的に級数展開で解いてみる。\$a = 0\$ として原点の周りに展開する。

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

として、

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad (2.17)$$

を (2.16) に代入して \$d_i\$ を定めて行けばよい。\$y(x)\$ の1階及び2階導関数は

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n x^{n-2} = \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+2)(n'+1) d_{n'+2} x^{n'} \end{aligned}$$

で与えられる。(2.16) の左辺第2項は、

$$\begin{aligned} A(x)y'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n a_m d_n x^{m+n-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=m}^{\infty} (n' - m + 1) a_m d_{n'-m+1} x^{n'} \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n'} (n' - m + 1) a_m d_{n'-m+1} \right) x^{n'} \end{aligned}$$

となる。最後に第3項を同様に変形すると

$$\begin{aligned} B(x)y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=m}^{\infty} b_m d_{n'-m} x^{n'} \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n'} b_m d_{n'-m} \right) x^{n'} \end{aligned}$$

を得る。これらの級数を (2.16) に代入して、両辺の $x^{n'}$ の係数を等しいと置くと

$$(n'+2)(n'+1)d_{n'+2} + \sum_{m=0}^{n'} \{(n'-m+1)a_m d_{n'-m+1} + b_m d_{n'-m}\} = c_{n'}$$

という漸化式を得る。この式の n' に具体的数値を代入して行くと

$$\begin{aligned} n' = 0; & \quad 2d_2 + (a_0 d_1 + b_0 d_0) = c_0 \\ n' = 1; & \quad 6d_3 + \{(2a_0 d_2 + b_0 d_1) + (a_1 d_1 + b_1 d_0)\} = c_1 \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

となり、初期条件として

$$y(0) = d_0, \quad y'(0) = d_1$$

が与えられれば順に d_n を決めて行けることが分かる。

注意しなければならないのは、“このように d_n を決める手順を与えられるということだけでは定理の証明にはならない”ということである。即ち、このようにして得られた級数解 (2.17) が有限の収束半径を持つことをまだ示していない。もし収束半径がゼロになれば、(2.17) の形の解がないことになり、定理が成り立たないことになる。

2.4.2 Fuchs 型常微分方程式

同次線形常微分方程式

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0 \tag{2.18}$$

を考える。 $x = a$ で $A(x)$, $B(x)$ は解析的でないが、 $(x-a)A(x) \equiv a(x)$, $(x-a)^2 B(x) \equiv b(x)$ は解析的であるとき、 $x = a$ は (2.18) の**確定特異点 (regular singular point)** という。その時 (2.18) を

$$(x-a)^2 y'' + (x-a)a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{2.19}$$

と表す。次の定理が級数解法を用いるうえで重要である。

定理 2.2 (Fuchs の定理) 微分方程式 (2.18) または (2.19) において $x = a$ が確定特異点ならば、この微分方程式は

$$y(x) = (x-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n, \quad (d_0 \neq 0) \tag{2.20}$$

の形の解を持つ。

この定理の主張していることは、大雑把に言うと、確定特異点での解の特異性はせいぜい極か分岐点でしかないということである。逆に、確定特異点でない特異点、即ち不確定特異点 (**irregular singular point**) は、一般には解の真性特異点になりうる。

無限遠点も含めて確定特異点しか持たないような常微分方程式を **Fuchs 型 (Fuchsian type)** 常微分方程式という。

例 1. Legendre の微分方程式
$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\nu}{1-x^2}y = 0$$

例 2. Bessel の微分方程式
$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

$a(x)$ 及び $b(x)$ の展開を

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \quad (2.21)$$

とすると、 λ は

$$\lambda^2 + (a_0 - 1)\lambda + b_0 = 0 \quad (2.22)$$

によって決まる。この方程式を決定方程式または指数方程式 (**indicial equation**) という。

(2.19) の 2 つの独立な解、即ち解の基本系は、(2.22) の解を λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \geq \lambda_2$) とすると以下のようなになる。

(1) $\lambda_1 - \lambda_2$ が整数でないとき:

$$y_1(x) = (x-a)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$$

$$y_2(x) = (x-a)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d'_n(x-a)^n$$

(2) $\lambda_1 - \lambda_2$ が整数のとき (**Froubenius の方法**):

$$y_1(x) = (x-a)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$$

$$y_2(x) = cy_1(x) \ln(x-a) + (x-a)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x-a)^n$$

の形の解がある。($c = 0$ の場合もある。)

このことを以下に具体的手順を見ながら示そう。前と同様に、(2.20), (2.21) を (2.19) に代入すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1)d_n(x-a)^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^n ((\lambda+n-m)a_m + b_m)d_{n-m} \right\} (x-a)^{n+\lambda} = 0$$

が得られる。 $n = 0$ 即ち $(x-a)^\lambda$ の係数を比較することによって

$$\lambda(\lambda-1)d_0 + \lambda a_0 d_0 + b_0 d_0 = 0$$

が得られるが、これは

$$\phi(\lambda) \equiv \lambda(\lambda - 1) + \lambda a_0 + b_0 = 0 \quad (2.23)$$

となり決定方程式が得られる。 $(x - a)^{n+\lambda}$ の係数を比較すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} n = 0 & \dots d_0 \phi(\lambda) = 0 \\ n = 1 & \dots d_1 \phi(\lambda + 1) + d_0 \phi_1(\lambda) = 0 \\ n = 2 & \dots d_2 \phi(\lambda + 2) + d_1 \phi_1(\lambda + 1) + d_0 \phi_2(\lambda) = 0 \\ n = 3 & \dots d_3 \phi(\lambda + 3) + d_2 \phi_1(\lambda + 2) + d_1 \phi_2(\lambda + 1) + d_0 \phi_3(\lambda) = 0 \\ & \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

但し、 $\phi_n(\lambda) = \lambda a_n + b_n$ とする。これより、 d_n は d_0 より、

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{\phi_1(\lambda)}{\phi(\lambda + 1)} d_0, & d_2 &= -\frac{\phi_1(\lambda + 1)}{\phi(\lambda + 2)} d_1 - \frac{\phi_2(\lambda)}{\phi(\lambda + 2)} d_0, \\ d_3 &= -\frac{\phi_1(\lambda + 2)}{\phi(\lambda + 3)} d_2 - \frac{\phi_2(\lambda + 1)}{\phi(\lambda + 3)} d_1 - \frac{\phi_3(\lambda)}{\phi(\lambda + 3)} d_0, \dots, \end{aligned} \quad (2.25)$$

のように求められる。

これから分かることは、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であれば、これらに対して異なる解 (基本系) が得られる。しかしながら、 $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合は2つは同じになるので、もう一つの解を見つけるには何か工夫が必要である。更に、 $\lambda_1 - \lambda_2 = n \in \mathbf{Z}$ で整数の時も、 $\phi(\lambda_2 + n) = \phi(\lambda_1) = 0$ なので $d_i = 0$ ($0 \leq i \leq n - 1$) となる。この場合 d_n は不定になり、 d_i ($i > n$) を d_n で表すと λ_1 に対する解と同じになり、 λ_2 に対して新しい解が得られない。

$\lambda_1 - \lambda_2 = n \geq 0$ の場合には、以下に示す **Frobenius** の方法によりもう一つの独立な解がもとまる。

(2.23) を用いずに λ は変数のままにしておく。 d_0 は与えられた定数と考え、(2.25) より d_n は λ の関数 $d_n(\lambda)$ と見なすことが出来る。そうやって得られた y は x と λ の関数として

$$y(x, \lambda) = (x - a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\lambda) (x - a)^n$$

というように書ける。これを (2.19) に代入すると、この y は (2.24) の $n = 0$ の式以外はすべて満たすので、 $(x - a)^\lambda$ の項のみが残る。即ち、

$$\mathbf{L}[y(x, \lambda)] = d_0 \phi(\lambda) (x - a)^\lambda$$

が得られるが、ここで d_0 も λ の関数 $d_0(\lambda)$ と見なすと、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \left[\frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right] &= \frac{\partial}{\partial \lambda} [d_0(\lambda) \phi(\lambda) (x - a)^\lambda] \\ &= d_0'(\lambda) \phi(\lambda) (x - a)^\lambda + d_0(\lambda) \phi'(\lambda) (x - a)^\lambda + d_0(\lambda) \phi(\lambda) (x - a)^\lambda \ln(x - a) \end{aligned}$$

更に $d_0(\lambda_2) = 0$ となるように $d_0(\lambda)$ を与えれば、この右辺は $\lambda = \lambda_2$ でゼロとなる。即ち、 $y(x) = \partial y(x, \lambda) / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_2}$ は (2.19) の解である。

具体的に $d_0(\lambda)$ の形を選ばなければならないが、最も簡単に $d_0(\lambda) = D \cdot (\lambda - \lambda_2)$ と取ると、 $y(x, \lambda_2) \propto y_1(x)$ で λ_1 の解と等しくなるが、もう一つの独立な解は

$$y_2(x) \equiv \left. \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_2} = cy_1(x) \ln(x-a) + (x-a)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{dd_n}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_2} (x-a)^n$$

のように求められる。

問 1. $y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$ を確定特異点の周りの級数展開を用いて解け。

問 2. $x^2y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$ を確定特異点の周りの級数展開を用いて解け。

2.5 随伴微分方程式

Keywords; 随伴微分方程式、自己随伴微分方程式

$$\mathbf{L}y(x) \equiv \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} y(x) = 0$$

に対して、

$$\mathbf{L}^*y(x) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (a_k(x)y(x)) = 0$$

を随伴微分方程式 (adjoint differential equation) という。また \mathbf{L}^* を \mathbf{L} の随伴微分演算子 (adjoint differential operator) という。 $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}$ のとき自己随伴 (self adjoint) という。

例 1. $\mathbf{L}y \equiv \frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2y$ は自己随伴。

例 2. $\mathbf{L}y \equiv \sum_{k=0}^n \frac{d^k}{dx^k} \left(P_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} \right)$ は自己随伴。

例 3. Hamiltonian $\mathbf{H} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ は自己随伴。

例 4. Legendre の微分方程式 $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \nu y = 0$ は $\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right\} + \nu y = 0$ と書けるので、自己随伴。

随伴微分方程式の性質として以下のものが重要である。

命題 2.1 $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ が $x = \alpha, \beta$ でゼロのとき、

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{L}y(x))z(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(x)(\mathbf{L}^*z(x))dx$$

である。

証明:

L の各項を考えると

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \left(a(x) \frac{d^k}{dx^k} y(x) \right) z(x) dx &= \left[a(x) y^{(k-1)} z(x) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} y^{(k-1)} \frac{d}{dx} (a(x) z(x)) dx \\ &= - \left[y^{(k-2)} \frac{d}{dx} (a(x) z(x)) \right]_{\alpha}^{\beta} + (-1)^2 \int_{\alpha}^{\beta} y^{(k-2)} \frac{d^2}{dx^2} (a(x) z(x)) dx \\ &\quad \dots\dots \\ &= (-1)^k \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{d^k}{dx^k} (a(x) z(x)) dx \end{aligned}$$

証明終

2.6 境界値問題と固有値, 固有関数

Keywords; 初期値問題、境界値問題、非同次境界条件、同次境界条件、Green 関数、固有値、固有関数、Sturm-Liouville 型、直交、完全、規格化

2.6.1 Green 関数

微分方程式の積分定数を決める条件として、例えば $x = 0$ での値 $y(0)$, $y'(0)$ などが与えられているような問題を初期値問題 (**initial condition problem**) という。それに対して、例えば $x = \alpha, \beta$ での $y(x)$ または $y'(x)$ などが与えられているような問題を境界値問題 (**boundary condition problem**) という。境界での条件が $y(\alpha) = a$, $y'(\beta) = b$ などのようにゼロでない値が課せられているような場合、それを非同次 (**inhomogeneous**) 境界条件という。それに対して、 $y(\alpha) = 0$, $y'(\beta) = 0$ などのように境界での値がゼロになるように条件が課せられているとき、それを同次 (**homogeneous**) 境界条件という。

同次境界条件を課せられた微分方程式

$$Ly \equiv \frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad y(\alpha) = y(\beta) = 0 \quad (2.26)$$

を考える。解が

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.27)$$

のように関数 $G(x, \xi)$ を用いて表されたとする。これを (2.26) に代入すると、 $G(x, \xi)$ は

$$\int_{\alpha}^{\beta} LG(x, \xi) f(\xi) d\xi = f(x)$$

を満たさなければならないことが分かる。そのためには、

$$LG(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad \text{つまり} \quad \frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{d}{dx} G(x, \xi) \right) + q(x)G(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (2.28)$$

を満足すればよい。このような関数 $G(x, \xi)$ を、微分方程式 (2.26) の **Green 関数 (Green function)** という。

Green 関数の主な性質として以下のようなものが重要である。

- (i) $G(x, \xi)$ は $x = \alpha, \beta$ で与えられた境界条件を満たす。
- (ii) $x = \xi$ 以外では、 $\mathbf{L}G(x, \xi) = 0$ 。
- (iii) $x = \xi$ で、 $G(x, \xi)$ は連続であるが、 $\partial G(x, \xi)/\partial x$ は不連続。

どれだけとびがあるか、(2.28) の両辺を $\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} dx$ で積分してみれば分かる。 $(\delta$ は無限小)

$$\left[P(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right]_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} = 1, \quad \text{即ち} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right]_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} = \frac{1}{P(\xi)} \quad (2.29)$$

Green 関数の具体的な形は以下のようにして求められる。同次方程式 $\mathbf{L}y = 0$ の解で、 $x = \alpha$ で境界条件を満たすものを $u_1(x)$ 、 $x = \beta$ で境界条件を満たすものを $u_2(x)$ とする。 $(u_x, u_2$ には定数倍の不定性があることに注意) 即ち、 $u_1(\alpha) = 0$ 、 $u_2(\beta) = 0$ である。すると Green 関数は

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1 u_1(x) & (\alpha \leq x \leq \xi) \\ c_2 u_2(x) & (\xi \leq x \leq \beta) \end{cases}$$

Green 関数の性質 (iii) より

$$\begin{aligned} G \text{ の連続性;} & \quad c_1 u_1(\xi) = c_2 u_2(\xi) \\ G' \text{ のとび (2.29);} & \quad c_1 u_1'(\xi) - c_2 u_2'(\xi) = -\frac{1}{P(\xi)} \end{aligned}$$

が得られるが、これより

$$c_1 = \frac{u_2(\xi)}{\Delta(\xi)P(\xi)}, \quad c_2 = \frac{u_1(\xi)}{\Delta(\xi)P(\xi)}, \quad \text{但し} \quad \Delta(\xi) \equiv \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{vmatrix}$$

ところで $\Delta(x)P(x)$ は x に依存しない。

その訳は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\Delta(x)P(x)) &= \frac{d}{dx} [(u_1 u_2' - u_1' u_2) P] \\ &= u_1 \underbrace{\frac{d}{dx} (P u_2')}_{-q u_2} - \underbrace{\frac{d}{dx} (P u_1')}_{-q u_1} u_2 = 0 \end{aligned}$$

であるから。

ゆえに $\Delta(\xi)P(\xi) \equiv 1/c$ と置くと、

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c u_1(x) u_2(\xi) & (\alpha \leq x \leq \xi) \\ c u_1(\xi) u_2(x) & (\xi \leq x \leq \beta) \end{cases}$$

のような Green 関数の表現を得る。

2.6.2 固有値、固有関数

例えば、パラメタ k を含む境界値問題

$$\mathbf{L}y \equiv y'' + k^2y = 0, \quad y(0) = y'(a) = 0$$

を考える。これは任意の k に対して自明な (**trivial**) 解 ($y = 0$) を持つが、それ以外の解は特定の k の値に対してのみ存在する。即ち、微分方程式の一般解は $y = A \sin(kx + \theta)$ であるが、 $y(0) = 0$ の条件より $A = 0$ または $\theta = 0$ となる。 $A = 0$ は自明な解を与えるので $\theta = 0$ でなければならない。もう一つの境界条件 $y(a) = 0$ より $\sin(ka) = 0$ を得るが、これは $ka = n$; $n = 1, 2, \dots$ を意味する。 $(n = 0$ は自明な解を与え、 $n = -1, -2, \dots$ は A を $-A$ にした解を与える。) つまり、 $k = k_n \equiv n\pi/a$ でなければならない。このような k_n を k の固有値 (**eigen value**)、そのときの方程式の解 $y_n(x) \equiv \sin k_n x$ を固有関数 (**eigen function**) という。

パラメーター λ を含む微分方程式

$$\mathbf{L}y \equiv \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda w(x)y$$

の境界値問題を **Sturm-Liouville** 型の境界値問題という。パラメーター $\lambda = \lambda_n$ に対して自明でない解 $u_n(x)$ があるとき、即ち、

$$\mathbf{L}u_n(x) = \lambda_n w(x)u_n(x)$$

の時、この問題の固有値は λ_n 、固有関数は $u_n(x)$ である。

固有関数の重要な性質として

(i) 直交性 (**orthogonality**): $\lambda_m \neq \lambda_n$ に対して $\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)u_m(x)w(x)dx = 0$

(ii) 完全 (完備) 性 (**completeness**):

任意の $f(x)$ について $f(x) = \sum_n c_n u_n(x)$ と書ける。

(ii) の証明は簡単でないが、自己随伴演算子 \mathbf{L} に対して非常に一般的に成り立つ。

(i) の証明 u_1, u_2 は解であるから

$$(pu_1')' + qu_1 - \lambda_1 wu_1 = 0$$

$$(pu_2')' + qu_2 - \lambda_2 wu_2 = 0$$

である。第一式に u_2 をかけ第二式に u_1 をかけて差をとると、

$$\frac{d}{dx} (p(u_1' u_2 - u_1 u_2')) - (\lambda_1 - \lambda_2) w u_1 u_2 = 0$$

この両辺を α から β まで積分すると、

$$[p(u_1' u_2 - u_1 u_2')]_{\alpha}^{\beta} - (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\alpha}^{\beta} w u_1 u_2 dx = 0$$

$p(x)\Delta(x)$ が定数なので左辺第一項はゼロ。故に、

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\alpha}^{\beta} u_1(x)u_2(x)w(x)dx = 0$$

証明終

境界値問題の解の唯一性より λ が決まると解はただ一つしかない。即ち、おなじ固有値に属する固有関数はただ一つしかない。これは、量子力学で一次元系ではエネルギー準位に縮退がないことに対応している。もちろん多次元系ではこのようなことは成り立たない。

固有関数系 $\{u_i\}$ が

$$\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)u_n(x)w(x)dx = 1$$

のように規格化 (normalization) されていると (ii) の展開の係数 c_n は

$$c_n = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)u_n(x)w(x)dx$$

となる。

2.6.3 固有関数による境界値問題の解法

微分方程式 $\mathbf{L}y = \lambda wy$ の境界値問題の、規格化された固有関数系 $\{u_i\}$ が与えられているとする。おなじ境界条件のもとで、微分方程式

$$\mathbf{L}y - \lambda wy = f(x) \quad (2.30)$$

の解を求める問題を考える。

解が $y = \sum_i c_i u_i$ のように表されているとする。これをもとの方程式に代入すると

$$\sum_i c_i (\mathbf{L}u_i - \lambda w u_i) = f$$

であるが、 $\mathbf{L}u_i = \lambda_i w u_i$ なので、

$$\sum_i c_i (\lambda_i - \lambda) w u_i = f$$

この両辺に u_l をかけて α から β まで積分すると、

$$c_l (\lambda_l - \lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f u_l dx, \quad \text{即ち} \quad c_l = \frac{1}{\lambda_l - \lambda} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) u_l(x) dx$$

を得る。結局 (2.30) の解は固有関数を用いて

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_i \frac{u_i(x)u_i(\xi)}{\lambda_i - \lambda} f(\xi) d\xi$$

と表されることが示された。この式と (2.27) を比べると

$$G_{\lambda}(x, \xi) \equiv \sum_i \frac{u_i(x)u_i(\xi)}{\lambda_i - \lambda}$$

は Green 関数の固有関数展開になっていることが分かる。

第3章 積分変換

3.1 Fourier 解析

Keywords; Fourier 級数展開、区分的に連続、区分的に滑らか、余弦 Fourier 級数、正弦 Fourier 級数、複素 Fourier 級数、Parseval の公式、Fourier 変換、逆 Fourier 変換、Parseval の定理、Gauss 積分

3.1.1 Fourier 級数

Fourier 級数 (Fourier series) とは、完全正規直交関数系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2\theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2\theta, \dots \right\} \quad (3.1)$$

による関数の展開と見なせる。関数系 (3.1) は、定義域 $[-\pi, \pi]$ の関数に対して完全正規直交系をなす。

正規直交系であることは、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\theta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta d\theta &= \delta_{n,m}, & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\theta &= 1, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\theta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta d\theta &= \delta_{n,m}, & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\theta d\theta &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\theta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta d\theta &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\theta d\theta &= 0, \end{aligned}$$

より分かる。

完全 (完備) 系であるということは、

$[-\pi, \pi]$ で定義された “任意の関数” $f(\theta)$ が、この関数系の級数和として “表される”

ということである。

上の文章のより正確な意味は以下の2つの定理によって与えられる。

定理 3.1 $f(\theta)$ が区分的連続かつ区分的滑らかならば、連続点 θ では

$$f(\theta) = S(\theta)$$

である。ここで $S(\theta)$ は

$$S(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (3.2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

で定義される。

証明略

区分的に連続とは、有限個の点以外では連続で不連続点においても左右からの極限が存在すること。区分的に滑らかとは、 f および f' 共に区分的に連続であること。

$S(\theta)$ を $f(\theta)$ の **Fourier 級数展開 (Fourier series expansion)** という。

定理 3.2 上の定理と同じ条件で、不連続点 θ では級数 (3.2) は $\frac{1}{2}(f(\theta-0) + f(\theta+0))$ に収束する。

証明略

例. $\theta = 0$ で不連続な関数

$$f(\theta) = \begin{cases} -\cos \theta - 1 & (-\pi \leq \theta \leq 0) \\ \cos \theta + 1 & (0 < \theta \leq \pi) \end{cases}$$

を Fourier 級数展開する。 f は奇関数なので $a_n = 0$ 。一方、 b_n は

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta + 1) \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta \sin n\theta + \sin n\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin(n+1)\theta + \frac{\sin(n-1)\theta}{2} + \sin n\theta \right] d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-(-1)^{n+1} + 1}{2(n+1)} + \underbrace{\frac{-(-1)^{n-1} + 1}{2(n-1)}}_{= 0, \text{ if } n = 1} + \frac{-(-1)^n + 1}{n} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi} & (n = 1) \\ \frac{2}{\pi} \left[(1 - (-1)^{n+1}) \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right\} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right] & (n \neq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

不連続点の様子を調べるために

$$f(\theta) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq \theta \leq 0) \\ 1 & (0 < \theta \leq \pi) \end{cases}$$

を Fourier 級数展開してみる。明らかに $a_n = 0$ である。

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin n\theta d\theta = -\frac{2}{\pi n} [(-1)^n - 1]$$

なので、

$$b_{2m} = 0, \quad b_{2m+1} = \frac{4}{\pi(2m+1)}$$

故に、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{1}{5} \sin 5\theta + \dots \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}(\theta) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} S_{2n+1}(\theta) &\equiv \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\theta = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^\theta \cos(2m+1)\phi d\phi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \left\{ \sum_{m=0}^n e^{i(2m+1)\phi} + \sum_{m=0}^n e^{-i(2m+1)\phi} \right\} d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\sin 2(n+1)\phi}{\sin \phi} d\phi \end{aligned}$$

この $S_{2n+1}(\theta)$ が $\theta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ でどのように振る舞うか調べよう。小さな θ に対して分母を $\sin \phi \sim \phi$ と近似できるので、

$$S_{2n+1}(\theta) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\sin 2(n+1)\phi}{\phi} d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^\xi \frac{\sin x}{x} dx$$

但し、 $2(n+1)\phi = x, 2(n+1)\theta = \xi$ と変数変換した。

● まず、 $\theta \rightarrow 0$ としてから $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\theta \rightarrow 0} S_{2n+1}(\theta) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^0 \frac{\sin x}{x} dx = 0$$

● 一方、 $n \rightarrow \infty$ としてから $\theta \rightarrow 0$ とすると、

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}(\theta) \right] = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = 1$$

● また、 $\xi \equiv 2(n+1)\theta$ を一定に保ち $n \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0$ とすると、

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0 \\ \xi = \text{const.}}} S_{2n+1}(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\xi \frac{\sin x}{x} dx \equiv S_i(\xi)$$

ここで、 $S_i(\xi)$ は正弦積分と呼ばれる関数である。

3.1.2 余弦 Fourier 級数、正弦 Fourier 級数

$f(\theta)$ が偶関数の場合、 $b_n = 0$ なので Fourier 級数展開は

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

となる。これを余弦 Fourier 級数という。

同様に $f(\theta)$ が奇関数の場合、 $a_n = 0$ なので Fourier 級数展開は

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta; \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

となる。これを正弦 Fourier 級数という。

例. $f(\theta) = \begin{cases} -\sin \theta & (\theta \leq 0) \\ \sin \theta & (\theta > 0) \end{cases}$ は余弦級数に展開できる。

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}, \quad a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

3.1.3 複素 Fourier 級数

Euler の公式を用いて

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}), \quad \sin n\theta = \frac{1}{2i}(e^{in\theta} - e^{-in\theta})$$

を代入すると、Fourier 級数は次のように表される。

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}; \quad c_n \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}}(a_n - ib_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (3.3)$$

これを複素 Fourier 級数という。 $f(\theta)$ が実の時、 $c_{-n} = c_n^*$ であることに注意。

次の Parseval の公式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)^2 d\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

問 1. Parseval の公式を示せ。

3.1.4 Fourier 積分

複素 Fourier 級数 (3.3) は、定義域 $[-\pi, \pi]$ の関数に対して定義されている。これを区間 $[-L, L]$ で定義されている関数 $f(x)$ に適用することを考える。それには、 $x \equiv (L/\pi)\theta$ のように変数変換すればよい。すると (3.3) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{in\pi x/L}; \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} \frac{\pi}{L} dx$$

ここで $Lc_n/\pi = \tilde{f}_n$ と置くと

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L f(x) e^{-ik_n x} dx \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L} \tilde{f}_n e^{in\pi x/L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \tilde{f}_n e^{ik_n x} \end{aligned}$$

但し、 $k_n \equiv n\pi/L$ および $\Delta k \equiv \pi/L$ と置いた。ここで $L \rightarrow \infty$ の極限をとると、第 2 式の級数は積分で表されるので、次の式を得る。

$$\tilde{f}(k) \equiv f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{Fourier 変換} \quad (3.4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{+ikx} dk \quad \text{逆 Fourier 変換} \quad (3.5)$$

これらをそれぞれ、**Fourier 変換**、**逆 Fourier 変換**という。第 2 式の \sim は、 f の不連続点 x では右辺が $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ に収束することを強調するために用いた。

Fourier 変換の右辺に逆 Fourier 変換を代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx' + ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \right\}}_{=\delta(x-x')} f(x') \end{aligned}$$

左辺と右辺を比較すると $\{\dots\}$ は $\delta(x-x')$ でなければならないことが分かる。即ち、Dirac の δ -関数の積分表現として

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

を得る。

Fourier 変換に対しては次の定理が成り立つ。

定理 3.3 (Parseval の定理)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk$$

証明:

左辺に逆 Fourier 変換の式を代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{i(k-k')x} \tilde{f}(k) \tilde{f}^*(k') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \delta(k-k') \tilde{f}(k) \tilde{f}^*(k') = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk \end{aligned}$$

証明終

例 1. 減衰振動子

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-t/T} \sin \omega_0 t & (t > 0) \end{cases}$$

の Fourier 変換を計算してみる。

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{-t/T} \sin \omega_0 t e^{-i\omega t}$$

Euler の公式 $\sin \omega_0 t = (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})/(2i)$ を代入すると積分が実行できて

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1/T + i(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{1/T + i(\omega + \omega_0)} \right]$$

問 2. T および ω_0 を適当に選び、 $\tilde{f}(\omega)$ の実部および虚部のグラフを描いてみよ。それらは $T\omega_0 \gg 1$ の時にはどうなるか？

例 2. Gauss 分布 平均値 $\langle x \rangle = a$, 分散 $\langle (x - a)^2 \rangle = \sigma^2$ の Gauss 分布

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right]$$

の Fourier 変換は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int \exp \left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right] e^{-ikx} dx \\ &\quad \left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} \equiv y \quad \text{と変数変換すると} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \exp[-y^2 - ik(\sqrt{2}\sigma y + a)] dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-ika} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-y^2 - i\sqrt{2}\sigma ky] dy \\ &\quad \left(-y^2 - i\sqrt{2}\sigma ky = -\left(y + \frac{i\sigma}{\sqrt{2}}k\right)^2 - \frac{\sigma^2}{2}k^2 \quad \text{に注意すると} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-ika - \frac{\sigma^2}{2}k^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\left(y + \frac{i\sigma}{\sqrt{2}}k\right)^2 \right] dy \end{aligned}$$

最後の積分は $y + \frac{i\sigma}{\sqrt{2}}k \equiv z$ と変数変換すると

$$\text{積分} = \int_{-\infty + i\sigma k/\sqrt{2}}^{+\infty + i\sigma k/\sqrt{2}} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \quad (3.6)$$

と計算できる。ここで、**Gauss 積分**の公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \quad (3.7)$$

を用いた。故に Fourier 変換は

$$\tilde{f}(k) = \exp\left(-ika - \frac{\sigma^2}{2}k^2\right)$$

となる。即ち、**Gauss 分布の Fourier 変換は Gauss 分布になる**ことが示された。分布の中は、 $\Delta x \sim \sigma$ に対して $\Delta k \sim 1/\sigma$ 、つまり $\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$ となる。これは量子力学の不確定性関係に対応している。

補足:(3.6)の二つめの等号は以下のように示せる。 $A = -L + i\sigma k/\sqrt{2}$, $B = +L + i\sigma k/\sqrt{2}$, $C = +L$, $D = -L$ として $\oint_{ABCD} e^{-z^2} dz = 0$ なので、

$$\int_{AB} e^{-z^2} dz = \int_{DC} e^{-z^2} dz - \left[\int_{BC} + \int_{DA} \right] e^{-z^2} dz$$

ところで DA 上では $z = -L + iy$, $y \in \mathbf{R}$ と表されるので、

$$\begin{aligned} \left| \int_{DA} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\sigma k/\sqrt{2}} \exp[-(L^2 - 2Lik - y^2)] i dy \right| \\ &= \left| e^{-L^2} i \int_0^{\sigma k/\sqrt{2}} \exp[2Lik + y^2] dy \right| \\ &\leq e^{-L^2} i \int_0^{\sigma k/\sqrt{2}} e^{y^2} dy \rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

同様に $\left| \int_{BC} e^{-z^2} dz \right| \rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty)$

即ち、 $L \rightarrow \infty$ の極限で $\int_{AB} e^{-z^2} dz = \int_{DC} e^{-z^2} dz$ が示された。

問 3. Gauss 積分の公式 (3.7) を示せ。

例 3. Yukawa ポテンシャル

$$V(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

の 3次元 Fourier 変換を計算する。

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\vec{k}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint d\vec{x} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \frac{e^{-\kappa r}}{r} \\ &\quad \left(\vec{k} \cdot \vec{x} = rk \cos \theta, \quad d\vec{x} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_0^\infty dr r^2 2\pi \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin \theta \exp(-irk \cos \theta)}_{\int_{-1}^1 dx \exp(-irkx)} \frac{e^{-\kappa r}}{r} \end{aligned}$$

括弧でくくられた部分の積分は $\cos \theta = \mu$ と変数変換することにより

$$\int_{-1}^1 d\mu e^{-irk\mu} = \frac{-1}{irk} [e^{-irk\mu}]_{-1}^1 = -\frac{e^{-irk} - e^{irk}}{irk}$$

と計算できる。故に、

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dr \frac{e^{irk} - e^{-irk}}{ik} e^{-\kappa r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{k} \text{Im} \int_0^\infty dr e^{ikr - \kappa r} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}k} \text{Im} \frac{1}{\kappa - ik} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\kappa^2 + k^2} \end{aligned}$$

を得る。

最後の結果で、 $\kappa \rightarrow 0$ の極限をとると、Coulomb ポテンシャルの Fourier 変換になることに注意せよ。

問 4. この逆変換が Yukawa ポテンシャルになることを確かめよ。

3.2 Laplace 変換

Keywords; Laplace 変換、逆 Laplace 変換

Fourier 変換 (3.4) や逆 Fourier 変換 (3.5) はしばしば収束しない (*e.g.* $f(x) = 1, x^2, \text{etc.}$)。そのような場合でも、収束因子 $e^{-\gamma x}$ ($\gamma > 0$) をかけて $x > 0$ のみを考えて、積分を収束させることができることが多い。即ち、 $f(x)$ ではなく $f(x)H(x)e^{-\gamma x}$ の Fourier 変換

$$g(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(x)e^{-\gamma x - ikx} dx \quad (3.8)$$

$$f(x)H(x)e^{-\gamma x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx} dk \quad (3.9)$$

を考える。但し、 $H(x)$ は階段関数

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

である。ここで、 $\gamma + ik = s$ とおくと、第一式の右辺は

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx \equiv F(s) \quad (3.10)$$

のように書ける。すると、第二式の逆変換の式は、 $F(s)$ を用いて

$$f(x)H(x)e^{-\gamma x} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)e^{(s-\gamma)x} \frac{ds}{i}$$

となるので、 $x > 0$ に対しては

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)e^{sx} ds \quad (3.11)$$

となる。 γ は (3.8) の積分が収束するように、十分大きくとらなければならない。即ち、(3.11) の積分路の右側で $F(s)$ が正則になるようにとらなければならない。(3.10) を Laplace 変換、(3.11) を逆 Laplace 変換という。

逆変換の積分路: 逆変換 (3.11) を、積分路を Γ とかいて

$$f(x)H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s)e^{sx} ds$$

のように表示する。Laplace 変換 $F(s)$ が $|s|$ の大きなところで $|s|$ の中で小さくなり、

$$|F(s)| < \frac{M}{|s|^k}; \quad (k > 0, M > 0)$$

を満たすとき、 $x > 0$ では図のように、積分路 Γ の左側に十分大きな半径 R の円弧をつけ加えて、閉曲線 C で置き換えることができる。即ち、逆 Laplace 変換の式は

$$f(x)H(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(s) e^{sx} ds$$

と書くことができる。

証明:

閉曲線 C での積分は $\oint_C = \int_{AB} + \int_{BD} + \int_{DEF} + \int_{FA}$ のように分けることができる。 $R \rightarrow \infty$ の極限で、第一番目の積分は \int_{Γ} に収束する。残りの積分がゼロに収束することは以下のようにして分かる。

$s = Re^{i\theta}$ と変数変換すると、二番目の積分は

$$\int_{BD} F(s)e^{sx} ds = \int_{\theta_0}^{\pi/2} F(Re^{i\theta}) \exp(xR(\cos \theta + i \sin \theta)) Re^{i\theta} i d\theta$$

故に、両辺の絶対値をとると

$$\begin{aligned} \left| \int_{BD} F(s)e^{sx} ds \right| &\leq \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{M}{R^{k-1}} \exp(xR \cos \theta) d\theta < \frac{M}{R^{k-1}} \exp(xR \cos \theta_0) \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \\ &\quad \left(\text{ここで } \cos \theta_0 = \frac{\gamma}{R} \text{ 即ち } \frac{\pi}{2} - \theta_0 = \sin^{-1} \frac{\gamma}{R} \text{ を用いて} \right) \\ &= \frac{M}{R^{k-1}} e^{x\gamma} \sin^{-1} \frac{\gamma}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。同様に、 $\left| \int_{FA} F(s)e^{sx} ds \right| \rightarrow 0$ も示せる。

最後に、

$$\begin{aligned} \left| \int_{DEF} F(s)e^{sx} ds \right| &\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{M}{R^k} \exp(xR \cos \theta) R d\theta = \frac{M}{R^{k-1}} 2 \int_0^{\pi/2} \exp(-xR \sin \theta) d\theta \\ &\quad \left(\text{不等式 } \sin \theta > \frac{2}{\pi} \theta \text{ を用いると} \right) \\ &< \frac{2M}{R^{k-1}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2}{\pi} xR \theta\right) d\theta}_{-\frac{\pi}{2xR} [e^{-xR} - 1]} \rightarrow 0; \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

証明終

例. $f(x) = x$ の Laplace 変換を計算してみる。

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} x dx = \left[-\frac{e^{-sx}}{s} x \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = -\frac{1}{s^2} [e^{-sx}]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

逆変換は、

$$\begin{aligned} x < 0 \quad \text{のとき} & \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{sx} \frac{1}{s^2} ds = 0 \\ x > 0 \quad \text{のとき} & \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sx} \frac{1}{s^2} ds = \left. \frac{de^{sx}}{ds} \right|_{s=0} = x \end{aligned}$$

となり、 $xH(x)$ になる。

3.3 いくつかの関係式

Keywords; たたみ込み

$f(x)$ の Fourier 変換、及び、Laplace 変換をそれぞれ

$$\mathbf{F}[f] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk} f(x) dx, \quad \mathbf{L}[f] \equiv \int_0^{\infty} e^{-xs} f(x) dx,$$

と書くことにする。

(1) 微分

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[f'] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk} f'(x) dx \\ &= \underbrace{\left[e^{-ixk} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\rightarrow 0} + ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk} f(x) dx = ik \mathbf{F}[f] \\ \mathbf{L}[f'] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx = \left[e^{-sx} f(x) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= -f(0) + s \mathbf{L}[f] \end{aligned}$$

(2) 積分 $f(x)$ の積分 $F(x)$ を $F(x) = \int_0^x f(x') dx' + F(0)$ とする、即ち、 $F'(x) = f(x)$ である。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[F] &= \int_0^{\infty} dx e^{-sx} \left[\int_0^x dx' f(x') + F(0) \right] \\ &= \int_0^{\infty} dx' \underbrace{\int_{x'}^{\infty} dx e^{-sx} f(x')}_{e^{-sx'}/s} + \frac{F(0)}{s} \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} dx' e^{-sx'} f(x') + \frac{F(0)}{s} = \frac{F(0) + \mathbf{L}[f]}{s} \\ \mathbf{L}[f] &= F(0) + s \mathbf{L}[F] \end{aligned}$$

$\mathbf{F}[F]$ は多少注意が必要である。(1)の微分の公式を用いると、 $\mathbf{F}[F'] = \mathbf{F}[f] = ik\mathbf{F}[F]$ となるが、積分定数を考慮すると

$$\mathbf{F}[F] = \frac{\mathbf{F}[f]}{ik} + \mathbf{F}\left[\frac{C}{2\pi}\right] = \frac{\mathbf{F}[f]}{ik} + C\delta(k)$$

となる。

(3) 平行移動

$$\begin{aligned}\mathbf{F}[f(x+a)] &= \int e^{-ikx} f(x+a) dx \quad (y = x+a \text{ と変数変換する}) \\ &= e^{ika} \int e^{iky} f(y) dy = e^{ika} \mathbf{F}[f]\end{aligned}$$

$\mathbf{L}[f(x+a)]$ を計算するために、 $f(x) = 0 (x < 0)$ と仮定する。 $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned}\mathbf{L}[f(x+a)] &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x+a) dx = e^{sa} \int_a^\infty e^{-sy} f(y) dy \\ &= e^{sa} \left[\mathbf{L}[f] - \int_0^a e^{-sy} f(y) dy \right]\end{aligned}$$

$a < 0$ のときには、 $f(x) = 0 (x < 0)$ と仮定したので

$$\mathbf{L}[f(x+a)] = e^{sa} \int_0^\infty e^{-sy} f(y) dy = e^{sa} \mathbf{L}[f]$$

(4) 指数関数との積

$$\begin{aligned}\mathbf{F}[e^{\alpha x} f(x)](k) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} e^{\alpha x} f(x) dx = \mathbf{F}[f](k + i\alpha) \\ \mathbf{L}[e^{\alpha x} f(x)](s) &= \int_0^\infty e^{-sx} e^{\alpha x} f(x) dx = \mathbf{L}[f](s - \alpha)\end{aligned}$$

(5) x との積

$$\begin{aligned}\mathbf{F}[xf(x)] &= \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty i \frac{d}{dk} e^{-ikx} f(x) dx = i \frac{d}{dk} (\mathbf{F}[f](k)) \\ \mathbf{L}[xf(x)] &= -\frac{d}{ds} (\mathbf{L}[f](s))\end{aligned}$$

(6) たたみ込み 関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみ込み (convolution) $h(x)$ は

$$h(x) = \int_{-\infty}^\infty f(y) g(x-y) dy$$

で定義される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}[h] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(x-y) && (z \equiv x-y \text{ とおく}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ik(z+y)} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(z) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} g(z) \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} f(y) = \mathbf{F}[f] \mathbf{F}[g] \\
 \mathbf{L}[h] &= \int_0^{\infty} dx e^{-sx} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(x-y) \\
 &= \int_0^{\infty} dy \int_y^{\infty} dx e^{-sx} f(y) g(x-y) && (z \equiv x-y \text{ とおく}) \\
 &= \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz e^{-s(y+z)} f(y) g(z) = \mathbf{L}[f] \mathbf{L}[g]
 \end{aligned}$$

例 1. $f(t)$ を任意の関数として、微分方程式

$$y' + \gamma y = f(t)$$

を Fourier 変換を用いて解いてみる。

$$\tilde{y}(\omega) \equiv \int dt e^{-i\omega t} y(t)$$

のように Fourier 変換を表示する。方程式の両辺を Fourier 変換すると

$$i\omega \tilde{y}(\omega) + \gamma \tilde{y}(\omega) = \tilde{f}(\omega), \quad \text{故に} \quad \tilde{y}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega + \gamma}$$

これを Fourier 逆変換すると

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega + \gamma} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int dt' e^{i\omega t - i\omega t'} \frac{f(t')}{i\omega + \gamma} \\
 &= \int dt' f(t') \underbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{i\omega + \gamma}}_{\equiv I}
 \end{aligned}$$

ここで、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{i\omega + \gamma}$ を $t > t'$ と $t < t'$ の場合に分けて計算すると

$$I = \begin{cases} \oint_{C_+} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{i\omega + \gamma} = e^{-\gamma(t-t')} & (t > t') \\ \oint_{C_-} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{i\omega + \gamma} = 0 & (t < t') \end{cases}$$

但し、 C_{\pm} は実軸に半径無限大の上半円または下半円を付け加えた閉曲線。故に、

$$y(t) = \int_{-\infty}^t dt' f(t') e^{-\gamma(t-t')}$$

が得られる。ここで注意しなければならないのは、こうやって求めた解には同次方程式の解 $Ce^{-\gamma t}$ の項が含まれていない点である。この項は $t \rightarrow -\infty$ で発散し Fourier 変換できないために、Fourier 変換で解いた解には現れないのである。別の言い方をすると、Fourier 変換で解いた解は $t = -\infty$ で初期値を与えたものになっている。

例2. 例1.と同じ方程式を Laplace 変換を用いて解いてみる。Laplace 変換を

$$\hat{y}(s) \equiv \int_0^{\infty} dt e^{-st} y(t)$$

と書き、方程式の両辺を Laplace 変換すると

$$-y(0) + s\hat{y}(s) + \gamma\hat{y}(s) = \hat{f}(s) \quad \text{故に、} \quad \hat{y}(s) = \frac{\hat{f}(s) + y(0)}{s + \gamma}$$

が得られる。Laplace 逆変換は

$$y(t) = \int_{\Gamma} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{\hat{f}(s) + y(0)}{s + \gamma}$$

であるが、分子の第2項は、 $t > 0$ に対して

$$\text{第2項} = \int_{\Gamma} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{y(0)}{s + \gamma} = y(0)e^{-\gamma t}$$

を与える。第1項は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \text{第1項} &= \int_{\Gamma} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{\hat{f}(s)}{s + \gamma} = \int_{\Gamma} \frac{ds}{2\pi i} \int_0^{\infty} dt' e^{st-st'} \frac{f(t')}{s + \gamma} \\ &= \int_0^{\infty} dt' f(t') \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{s(t-t')}}{s + \gamma}}_{\equiv I} \end{aligned}$$

ここで、 $C_L(C_R)$ を左(右)半円を付け加えた閉曲線として、 I は

$$\begin{aligned} t > t' \quad \text{のとき} \quad & I = \oint_{C_L} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{s(t-t')}}{s + \gamma} = e^{-\gamma(t-t')} \\ t < t' \quad \text{のとき} \quad & I = \oint_{C_R} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{s(t-t')}}{s + \gamma} = 0 \end{aligned}$$

となるので、

$$\text{第1項} = \int_0^t dt' f(t') e^{-\gamma(t-t')}$$

結局、解として

$$y(t) = y(0)e^{-\gamma t} + \int_0^t dt' f(t') e^{-\gamma(t-t')}$$

を得る。これは、 $t = 0$ での初期条件を満たす解になっている。

注. $t < 0$ に対しては $y(t) = 0$ を与えるが、これは Laplace 変換の性質によるもので、解くべき微分方程式の解とはなんの関係もない。

第4章 Partial Differential Equation

分方程式)

(偏微)

It is not easy to discuss a general theory of PDE (Partial Differential Equation). In the lecture, after deriving the three normal forms for the linear second-order constant-coefficient two-variable PDE, we shall only discuss some examples for each type.

4.1 Normal Form (標準型)

Keywords; elliptic type (橢圓型), hyperbolic type (雙曲型), parabolic type (放物型), Dirichlet condition, Neumann condition, Cauchy condition

A general form of the second order constant coefficient linear PDE with two variables may be written as

$$a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + 2e \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + fu(x, y) = g(x, y). \quad (4.1)$$

This can be reduced into one of the following normal forms depending upon the sign of $ac - b^2$;

$$ac - b^2 > 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \lambda u = g(\xi, \eta) \quad \text{elliptic type (橢圓型)}$$

$$ac - b^2 < 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \lambda u = g(\xi, \eta) \quad \text{hyperbolic type (雙曲型)}$$

$$ac - b^2 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = g(\xi, \eta) \quad \text{parabolic type (放物型)}$$

Proof:

Let us begin with the case of $ac - b^2 = 0$. Eq.(4.1) can be put in the form of

$$a \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u + \left(2d \frac{\partial}{\partial x} + 2e \frac{\partial}{\partial y} \right) u + fu = g(x, y).$$

This will be the normal form if we can define the new variables ξ and η that satisfy

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \text{and} \quad \frac{2d}{a} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2e}{a} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

In order to achieve these, we put

$$x = A\xi + B\eta, \quad \text{and} \quad y = C\xi + D\eta,$$

then we have

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = A \frac{\partial}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = B \frac{\partial}{\partial x} + D \frac{\partial}{\partial y}.$$

By comparing the above two sets of equations, we obtain

$$A = 1, \quad B = \frac{2d}{a}, \quad C = \frac{b}{a}, \quad \text{and} \quad D = \frac{2e}{a},$$

and

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{f}{a}u = \frac{1}{a}g(\xi, \eta).$$

For the case of $ac - b^2 \neq 0$, the terms with the first order derivatives in (4.1) can be eliminated by putting $u = u_1 \exp(-\alpha x - \beta y)$ with appropriate α and β ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \alpha u_1 \right) e^{-\alpha x - \beta y}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \beta u_1 \right) e^{-\alpha x - \beta y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha^2 u_1 \right) e^{-\alpha x - \beta y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - \beta \frac{\partial u_1}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial y} + \alpha \beta u_1 \right) e^{-\alpha x - \beta y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\beta \frac{\partial u_1}{\partial y} + \beta^2 u_1 \right) e^{-\alpha x - \beta y}. \end{aligned}$$

By inserting these into (4.1), we obtain

$$\begin{aligned} &\text{the coefficient of } \frac{\partial u_1}{\partial x} e^{-\alpha x - \beta y} \quad ; \quad 2d - 2a\alpha - 2b\beta, \\ &\text{the coefficient of } \frac{\partial u_1}{\partial y} e^{-\alpha x - \beta y} \quad ; \quad 2e - 2c\beta - 2b\alpha. \end{aligned}$$

These coefficients equal to zero if α and β satisfy

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ b, & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix},$$

which is possible because the determinant of the matrix in the left hand side is not zero. Therefore, (4.1) becomes

$$\begin{aligned} &\underbrace{a \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}}_{\equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}} + f_1 u_1 = g e^{\alpha x + \beta y} \equiv g_1(x, y) \\ &= \underbrace{a \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2}_{\equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}} u_1 + \underbrace{\left(\frac{ac - b^2}{a} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{\equiv \pm \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}} u_1 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Examples

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	wave equation	hyperbolic type
$\Delta \psi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0$	Laplace equation	elliptic type
$\Delta \psi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \rho$	Poisson equation	elliptic type
$\Delta \psi - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$	Diffusion equation	parabolic type
$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$	Schrödinger equation	

In order to solve a PDE, boundary conditions should be specified. There are three types of boundary conditions. (i) When the value of the function ψ is given along the boundary, the condition is called the **Dirichlet condition**. (ii) When the value of the derivative normal to the boundary $\frac{\partial \psi}{\partial n} \equiv (\nabla \psi)_n$ is given along the boundary, it is called the **Neumann condition**. (iii) If both of ψ and $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ are imposed, we call it the **Cauchy condition**.

We know from the study of electromagnetism that there exists one and only one solution for the Laplace equation with a closed boundary if either the Dirichlet condition or the Neumann condition is imposed, but the Cauchy condition can not be imposed. It is not easy, however, to tell in general that what kind of boundary conditions are necessary and sufficient for a solution to be unique for a given partial differential equation with a given shape of boundary.

In the following, we will discuss several examples.

4.2 Laplace and Poisson Equation

Since all of you should have had a lot of experiences in solving these types of equations in the study of electromagnetism, we will not discuss them here.

4.3 Wave Equation (波動方程式)

The wave equation with one spatial dimension is given by

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

The general solution for this is easy to write down as

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

where f and g are any two times differentiable functions.

Example 1. First, we consider an initial value problem. This may be regarded as a boundary condition problem for the open region $t \geq 0$ and $-\infty < x < \infty$. In this case, we have to give the Cauchy condition at $t = 0$, namely,

$$\psi(x, 0) = u(x), \quad \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v(x).$$

Then we obtain

$$u(x) = f(x) + g(x), \quad v(x) = -cf'(x) + cg'(x).$$

If you integrate the second equation and define $V(x)$ by $V'(x) = v(x)$, the particular solution that satisfies the initial condition can be written as

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \left(u(x - ct) - \frac{1}{c} V(x - ct) \right) + \frac{1}{2} \left(u(x + ct) + \frac{1}{c} V(x + ct) \right).$$

Note that the integral constants in $V(x)$ are cancelled each other in the expression.

Example 2. Now we discuss the boundary condition problem for the region $x \geq 0$ and $t \geq 0$. If we impose the condition along the x -axis for $x > 0$ as

$$\psi(x, 0) = u(x), \quad \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v(x),$$

and along the t -axis for $t > 0$ as

$$\psi(0, t) = w(t),$$

then we obtain, as in the same way with the previous example, for $x > ct$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \left(u(x - ct) - \frac{1}{c} V(x - ct) \right) + \frac{1}{2} \left(u(x + ct) + \frac{1}{c} V(x + ct) \right).$$

For $x < ct$, however, this form of solution can not be used because the arguments of u and V become negative, which is not allowed in this case.

We assume the form of the solution for $x < ct$ as

$$\psi(x, t) = F(x - ct) + \frac{1}{2} \left(u(x + ct) + \frac{1}{c} V(x + ct) \right).$$

The boundary condition along the t -axis gives

$$\psi(0, t) = F(-ct) + \frac{1}{2} \left(u(ct) + \frac{1}{c} V(ct) \right) = w(t),$$

thus we have

$$F(-ct) = w(t) - \frac{1}{2} \left(u(ct) + \frac{1}{c} V(ct) \right),$$

which determines the solution uniquely.

It is worth to note here that only one out of $\psi(0, t)$ and $\partial\psi/\partial t|_{x=0}$ can be imposed along the t -axis. Physically this is because the effect of the initial conditions along the x -axis reaches $x = 0$ for $t > 0$.

4.4 Diffusion Equation (拡散方程式)

Keywords; Diffusion Constant, Equation of Continuity, Fourier's Law, Thermal Conductivity, Specific Heat, Error Function, Diffusion Length

The diffusion equation describes diffusion process of matter. In many cases, a flux of the matter \vec{j}_ρ is proportional to the gradient of the matter concentration ρ as

$$\vec{j}_\rho = -D\nabla\rho,$$

where the coefficient D is called the **Diffusion Constant**. The time derivative of the concentration, on the other hand, is related to the flux by **the Equation of Continuity**,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_\rho = 0,$$

because quantity of the matter conserves at any spatial points. Eliminating the flux from the above two equations, we obtain the diffusion equation for the matter concentration

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho.$$

Spatial distribution of the temperature T also follows the diffusion equation. The heat flux \vec{j}_T is proportional to the temperature gradient as

$$\vec{j}_T = -K\nabla T,$$

which is called **Fourier's Law**. The coefficient K is called the **Thermal Conductivity**. In the situation where no work is involved, the variation of the internal energy density u_E is due to the heat conduction, thus the law of energy conservation leads to the equation of continuity for the energy density,

$$\frac{\partial u_E}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_T = 0.$$

In the case where the **Specific Heat** C does not depend on the temperature, the internal energy u_E is a linear function of the temperature T ,

$$u_E = C\rho T + \text{constant},$$

thus we obtain

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T; \quad \kappa \equiv \frac{K}{C\rho}.$$

In the following, we shall restrict ourselves to the one-dimensional case, namely,

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4.2)$$

Example 1. Suppose that thermally conductive material fills the space between $x = 0$ and $x = D$, and that its temperature is uniform and zero at the initial time $t = 0$. We also assume that the boundary at $x = D$ is thermally insulated,

but from the other boundary at $x = 0$, the material is heated by the constant heat flux Q . Since the heat flux j is given by the temperature gradient as $j = -K \frac{\partial T}{\partial x}$, our problem is to solve (4.2) with the Neumann type boundary conditions,

$$-K \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = Q, \quad \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=D} = 0,$$

and the Dirichlet type initial condition,

$$T(x, t = 0) = 0.$$

Note that the general solution that satisfies the boundary conditions is expressed as the sum of a particular solution T_p with the inhomogeneous boundary conditions and a general solution T_c with homogeneous ($Q = 0$) boundary conditions, namely, $T = T_p + T_c$.

First, we consider *the particular solution* T_p . We assume the variables x and t separate as $T_p(x, t) = u(x) + v(t)$, then eq.(4.2) becomes

$$v'(t) = \kappa u''(x) = \alpha.$$

The both sides of the equation should be constant α because the left hand side depends only on t whereas the right hand side depends only on x . Therefore, we obtain

$$v(t) = \alpha t + \text{const.} \quad u(x) = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\kappa} x^2 + ax + \text{const.}$$

α , a , and const.'s are integral constants but we can neglect const.'s because the boundary conditions are given by the derivative $\partial T / \partial x$ and we are only interested in a particular solution here. From the boundary conditions ;

$$-K \left[\frac{\alpha}{\kappa} x + a \right]_{x=0} = Q, \quad \left[\frac{\alpha}{\kappa} x + a \right]_{x=D} = 0,$$

the constants α and a are determined as

$$\alpha = -\frac{\kappa Q}{DK} = \frac{Q}{DC\rho}, \quad a = -\frac{Q}{K}.$$

Thus the particular solution T_p is

$$\begin{aligned} T_p(x, t) &= u(x) + v(t) = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\kappa} x^2 + ax + \alpha t + \text{const.} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q}{DK} x^2 - \frac{Q}{K} x + \frac{Q}{DC\rho} t + \text{const.} \\ &= \frac{Q}{2DK} (x - D)^2 + \frac{Q}{DC\rho} t + \text{const.}' \end{aligned}$$

The constant in the last equation can be ignored because we are looking for a particular solution.

Next we consider *the general solution* T_c with the homogeneous boundary conditions, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=D} = 0$. In this case, we assume the variables separate as $T_c(x, t) = u(x)v(t)$, then we obtain

$$\frac{1}{\kappa} \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{u''(x)}{u(x)} = -k^2,$$

where k is a constant. We put the minus sign in front of the constant because we are interested in the solution which decays in time, not the one which explodes (See below). The solutions for the above equations are

$$v(t) = v_0 e^{-\kappa k^2 t}, \quad u(x) = A \cos(kx + \theta),$$

where v_0 , A , and θ are integral constants. From the homogeneous boundary conditions,

$$\theta = 0, \quad kD = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

thus

$$T_c(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x) \exp(-\kappa k_n^2 t); \quad k_n \equiv \frac{n\pi}{D},$$

with A_n 's being integral constants; They can be different for different k .

The general solution for the problem is given by the sum of T_p and T_c :

$$T(x, t) = \frac{Q}{2DK}(x - D)^2 + \frac{Q}{DC\rho}t + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x) \exp(-\kappa k_n^2 t).$$

The integral constants A_n 's are determined by the initial condition $T(x, t = 0) = 0$, which gives

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x) = -\frac{Q}{2DK}(x - D)^2.$$

Since this equation is in the form of the Fourier cosine series expansion for the right hand side, we can obtain A_n 's easily by multiplying the both sides with $\cos k_m x$ and integrating from $x = 0$ to $x = D$. Then the left hand side is

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^D A_n \cos k_n x \cos k_m x dx &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^D \frac{1}{2} \{ \cos(k_n + k_m)x + \cos(k_n - k_m)x \} dx \\ &= \begin{cases} DA_0 & \text{if } m = 0 \\ \frac{1}{2}DA_m & \text{if } m \neq 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

therefore,

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{Q}{2D^2K} \int_0^D (x - D)^2 dx = -\frac{1}{18} \frac{QD}{K}, \\ A_m &= -\frac{Q}{D^2K} \int_0^D (x - D)^2 \cos k_m x dx = -2 \frac{Q}{DK} \frac{1}{k_m^2} \quad (m \neq 0). \end{aligned}$$

Finally, we have

$$T(x, t) = \frac{Q\kappa}{DK} \left[t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa k_n^2} \cos(k_n x) (1 - \exp(-\kappa k_n^2 t)) \right].$$

Example 2. The next example is to solve the equation (4.2) for $x \geq 0$ under the conditions,

$$\text{Initial condition: } T(x, t = 0) = 0 \quad \text{for } x \geq 0$$

$$\text{Boundary condition: } T(x = 0, t) = 0 \quad \text{for } t > 0.$$

For this case, it is convenient to define the Laplace transform in time,

$$F(x, s) \equiv \int_0^\infty e^{-st} T(x, t) dt.$$

Then the equation (4.2) is expressed as

$$\frac{\partial^2 F(x, s)}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \left[-\underbrace{T(x, t = 0)}_{=0} + sF(x, s) \right] = \frac{sF(x, s)}{\kappa},$$

and the boundary condition is represented by

$$F(x = 0, s) = \frac{T_0}{s}.$$

We can easily obtain the solution:

$$F(x, s) = \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right).$$

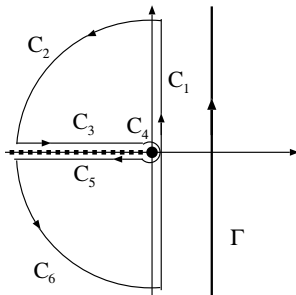
Only the exponentially decaying term in x is retained in this solution because the exponentially growing term is not physically acceptable. It is important to note here that \sqrt{s} should be treated as a complex function and the branch must be selected properly. In this case we have to take the branch which gives a positive real part, namely, $\Re\sqrt{s} > 0$. For this choice of the branch, the cut runs along the negative part of the real axis.

The solution is given by the inverse Laplace transformation

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{st} ds,$$

and this can be estimated as follows.

Suppose the path C as being the closed path which consists of the imaginary axis, the large semi-circle in the negative real part, the path along the negative part of the real axis infinitesimally above and below the cut, and the infinitesimally small circle at the origin. Each part of the path C is named as C_i , $i = 1, 2, \dots, 6$



and $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6$. Since there is no singularities inside the path C ,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{st} ds = 0,$$

thus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{st} ds \approx \int_{C_1} \dots ds = - \int_{C_2+C_3+C_4+C_5+C_6} \dots ds.$$

It can be easily shown that the integrals along the large circle C_2 and C_6 go to zero when the radius of the paths goes infinite. The integral along the small circle at the origin C_4 is estimated as

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_4} \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{st} ds \sim \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_4} \frac{T_0}{s} ds = -T_0.$$

The integral along C_3 which runs infinitesimally above the cut is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{st} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{st} ds \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{-s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{-st} ds \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} \exp\left(-i\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{-st} ds, \end{aligned}$$

and the integral along C_5 which runs infinitesimally below the cut is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_5} \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{st} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} \frac{T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{st} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} \exp\left(+i\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{-st} ds. \end{aligned}$$

Therefore we obtain

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} 2i \sin\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cdot x\right) e^{-st} ds \\ &\quad \text{(by transferring the integral variable as } s \equiv z^2, \quad ds = 2zdz) \\ &= T_0 \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \frac{zx}{\sqrt{\kappa}} \exp(-z^2 t) \frac{dz}{z} \right] = T_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right]. \end{aligned}$$

In the last equation, $\operatorname{erf} x$ is the **Error Function**(誤差関数) defined as

$$\operatorname{erf} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

and the derivation is left to the readers as an exercise. (not easy!)

Example 3. As the last example, let us consider the equation (4.2) for $-\infty < x < \infty$ with the initial condition $T(x, t = 0) = f(x)$. For this problem, the Fourier transform in x ,

$$F(k, t) \equiv \int dx e^{-ikx} T(x, t),$$

is useful. Then eq.(4.2) becomes

$$-k^2 F(k, t) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial F(k, t)}{\partial t}$$

and the solution for this is

$$F(k, t) = \phi(k) \exp(-\kappa k^2 t).$$

The function $\phi(k)$ is an integral constant that can depend on k . This is determined by the initial condition as

$$\phi(k) = F(k, t = 0) = \int dx e^{-ikx} f(x).$$

Thus the solution is obtained by the inverse Fourier transform,

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} \phi(k) \exp(-\kappa k^2 t) = \frac{1}{2\pi} \int dk \int dx' e^{ikx - ikx' - \kappa k^2 t} f(x') \\ &= \int dx' f(x') \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-x') - \kappa k^2 t} \right]}_{\equiv G(x-x', t)} = \int dx' G(x-x', t) f(x'). \end{aligned}$$

The function $G(x-x', t)$ defined by

$$\begin{aligned} G(x-x', t) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx - ikx' - \kappa k^2 t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}\right] \end{aligned}$$

is the Green function for the diffusion equation. It should be noted that $T(x, t) = G(x, t)$ if the initial condition is given by the delta function $f(x) = \delta(x)$, and that the width of the temperature distribution grows as \sqrt{t} . The length $\sqrt{\kappa t}$ is sometimes called the **Diffusion Length** (拡散長).

4.5 Wiener-Hopf Method

The Wiener-Hopf Method is a very interesting method, which enable us to solve a special type of boundary condition problems. The method makes full use of the complex function theory and may provide us a good exercise to finish the lecture of the Physical Mathematics I.

Among a lot of techniques that are employed in the method, the following simple observation is essential: If we have an equation

$$L(z) = U(z),$$

with the left hand side $L(z)$ being regular in the lower half plane and the right hand side $U(z)$ being regular in the upper half plane, then the both of them should be an entire function $M(z)$ because they are regular in both the lower and the upper half plane.

This innocent looking observation often leads us to the rather strong conclusion that $M(z)$ should be a constant or even zero! This is a simple result of the Liouville theorem which claims that all the entire functions except constants diverge as $|z|$ goes to the infinity. In the case where we know from some reasons that $L(z)$ or $U(z)$ should not diverge as $|z| \rightarrow \infty$, the function $M(z)$ must be a constant. In the case where we know from some reasons that $L(z)$ or $U(z)$ should go to zero as $|z| \rightarrow \infty$, the constant is zero.

Although the essential part of the method is simple, actual applications are often very complicated even in the simplest cases. In the following, we will see how the method goes by taking a simple example.

The problem we will consider is to solve

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - u(x, y) + 1 = 0 \quad (4.3)$$

in the upper half plane, or $y \geq 0$ and $-\infty < x < \infty$. The boundary conditions are given at the infinity and along the x -axis as

$$u(x, y) \rightarrow 1 \quad \text{as } y \rightarrow \infty, \quad \text{Dirichlet condition} \quad (4.4)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{for } x \leq 0, \quad \text{Dirichlet condition} \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{for } x \geq 0. \quad \text{Neumann condition} \quad (4.6)$$

The peculiarity for these boundary conditions is that the Dirichlet and the Neumann condition are mixed and the values of $u(x, 0)$ for $x > 0$ and $\partial u / \partial y|_{y=0}$ for $x < 0$ are not specified. We suppose that these are represented by unknown functions $U(x)$ and $\sigma(x)$ and write the conditions (4.5) and (4.6) as

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ U(x) & (x > 0) \end{cases}, \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} \sigma(x) & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}. \quad (4.8)$$

You may immediately notice that $u(x, y) = 1$ is a particular solution for the inhomogeneous equation (4.3), but we will find that another particular solution $u(x, y) = 1 - e^{-y}$ may be more convenient to express a general solution for the above boundary conditions.

In order to find the general solution for the homogeneous equation of (4.3), we define the Fourier transform of $u(x, y)$ by

$$\hat{u}(k, y) \equiv \int dx u(x, y) e^{-ikx}.$$

Then the homogeneous equation is written as

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(k, y)}{\partial y^2} = (k^2 + 1) \hat{u}(k, y),$$

and its solution is

$$\hat{u}(k, y) = \hat{A}(k)e^{-\sqrt{k^2+1}y} + \hat{B}(k)e^{+\sqrt{k^2+1}y},$$

where $\hat{A}(k)$ and $\hat{B}(k)$ are integral constants for each k . Therefore, the general solution for the original inhomogeneous equation (4.3) is given by

$$u(x, y) = 1 - e^{-y} + \int \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k)e^{-\sqrt{k^2+1}y+ikx} + \int \frac{dk}{2\pi} \hat{B}(k)e^{+\sqrt{k^2+1}y+ikx}. \quad (4.9)$$

Now we impose the boundary conditions (4.4), (4.7), and (4.8) on the solution (4.9). We can find easily $\hat{B}(k) = 0$ from (4.4). From the boundary condition (4.7), we obtain

$$\int \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k)e^{ikx} = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ U(x) & (x > 0) \end{cases},$$

thus $\hat{A}(k)$ is the Fourier transform of the right hand side, or

$$\hat{A}(k) = \hat{U}^{(+)}(k) \equiv \int_0^\infty dx U(x)e^{-ikx}. \quad (4.10)$$

The superscript (+) in $\hat{U}^{(+)}(k)$ is to emphasize that it is the Fourier transform of the function which is non-zero only for $x > 0$. It is very important to realize that there are no poles or no singularities of $\hat{U}^{(+)}(k)$ in the lower half of the complex k -plane because the integral (4.10) converges for $\text{Im}k < 0$. The last condition (4.8) gives us

$$1 - \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{k^2+1} \hat{U}^{(+)}(k)e^{ikx} = \begin{cases} \sigma(x) & (x < 0) \\ 0 & (x > 0) \end{cases},$$

from which we obtain

$$2\pi\delta(k) - \sqrt{k^2+1} \hat{U}^{(+)}(k) = \hat{\sigma}^{(-)}(k). \quad (4.11)$$

We like to point out that $\hat{\sigma}^{(-)}(k)$ is regular in the upper half plane.

Now we will separate the singularities of eq.(4.11). First of all, the delta function can be decomposed as

$$2\pi\delta(k) = \frac{i}{k+i\epsilon} - \frac{i}{k-i\epsilon},$$

by using the formula

$$\frac{1}{k \pm i\epsilon} = \wp \frac{1}{k} \mp \pi i \delta(k),$$

where ϵ is an infinitesimally small positive quantity and \wp indicates that the principal value should be taken when the function is integrated.

Then eq.(4.11) becomes

$$-\underbrace{\sqrt{k^2+1}} \hat{U}^{(+)}(k) - \frac{i}{k-i\epsilon} = \hat{\sigma}^{(-)}(k) - \frac{i}{k+i\epsilon}. \quad (4.12)$$

The right hand side of the equation (4.12) is regular in the upper half plane but the left hand side is not in the lower half plane because the first term has the factor $\sqrt{k^2+1}$, which has branch points at $k = \pm i$.

In order to remove the branch point in the lower half plane from the left hand side, we factorize $\sqrt{k^2 + 1}$ as

$$\sqrt{k^2 + 1} = \sqrt{k - i} \cdot \sqrt{k + i}$$

and divide the both sides by $\sqrt{k + i}$, then obtain

$$-\sqrt{k - i} \hat{U}^{(+)}(k) - \frac{1}{\sqrt{k + i}} \frac{i}{k - i\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{k + i}} \left(\hat{\sigma}^{(-)}(k) - \frac{i}{k + i\epsilon} \right), \quad (4.13)$$

where we can assume the cuts of the square roots run along the imaginary axis from i to ∞i for $\sqrt{k - i}$ and from $-i$ to $-\infty i$ for $\sqrt{k + i}$. The separation of singularities has not completed yet because now the second term of the left hand side has a cut in the lower half plane and a pole in the upper half plane. They can be, however, separated easily as

$$\frac{1}{\sqrt{k + i}} \frac{i}{k - i\epsilon} = \frac{i}{k} \left(\frac{1}{\sqrt{k + i}} - \frac{1}{\sqrt{i}} \right) + \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{i}{k - i\epsilon},$$

where the first term of the right hand side is regular in the upper half plane and the second term is regular in the lower half plane.

Thus the separation of singularities is finally completed as

$$\begin{aligned} -\sqrt{k - i} \hat{U}^{(+)}(k) - \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{i}{k - i\epsilon} &= \frac{1}{\sqrt{k + i}} \left(\hat{\sigma}^{(-)}(k) - \frac{i}{k + i\epsilon} \right) + \frac{i}{k} \left(\frac{1}{\sqrt{k + i}} - \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \\ &\equiv \hat{M}(k), \end{aligned} \quad (4.14)$$

both sides of which should be equal to an entire function $\hat{M}(k)$ as we have discussed at the beginning of this section. From (4.14), we obtain the Wiener-Hopf solutions

$$\hat{U}^{(+)}(k) = -\frac{1}{\sqrt{k - i}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{i}{k - i\epsilon} + \hat{M}(k) \right\}, \quad (4.15)$$

$$\hat{\sigma}^{(-)}(k) = \frac{i}{k + i\epsilon} - \sqrt{k + i} \left\{ \frac{i}{k} \left(\frac{1}{\sqrt{k + i}} - \frac{1}{\sqrt{i}} \right) - \hat{M}(k) \right\}. \quad (4.16)$$

Now we try to determine the entire function $\hat{M}(k)$. If we require the solution $u(x, y)$ be continuous, then $U(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow +0$. Since the behavior around $x = 0$ is related to the behavior of the Fourier transform $\hat{U}^{(+)}(k)$ around $|k| \sim \infty$, the requirement implies

$$\hat{U}^{(+)}(k) \sim o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{for } |k| \sim \infty.$$

From (4.15), this determined $\hat{M}(k)$ as $\hat{M}(k) = 0$ because the Liouville theorem assures us that all the entire functions but constants diverges as $|k| \rightarrow \infty$.

Therefore the solutions in the Fourier transform are

$$\begin{aligned} \hat{U}^{(+)}(k) &= -\frac{1}{\sqrt{k - i}} \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{i}{k - i\epsilon}, \\ \hat{\sigma}^{(-)}(k) &= \frac{i}{k + i\epsilon} - \sqrt{k + i} \frac{i}{k} \left(\frac{1}{\sqrt{k + i}} - \frac{1}{\sqrt{i}} \right), \end{aligned}$$

which can be transformed back into the x -space as

$$\begin{aligned} U(x) &= \int \frac{dk}{2\pi} \hat{U}^{(+)}(k) e^{ikx} = H(x) \operatorname{erf}(\sqrt{x}), \\ \sigma(x) &= H(-x) \left[\frac{e^{-|x|}}{\sqrt{\pi|x|}} + \operatorname{erf}(\sqrt{x}) \right], \end{aligned}$$

where $H(x)$ is the Heaviside step function defined by

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}.$$

$u(x, y)$ may be obtained from (4.9).