解析力学 講義ノート

中西 秀

2025年4月15日

目 次

第 0 章　はじめに　**4**

第 1 章　ニュートン力学の復習　**5**

1.1　ニュートンの運動法則 5
1.1.1　運動量 5
1.1.2　保存力場 6
1.1.3　力学的エネルギー 8
1.1.4　角運動量 8
1.1.5　保存則 9
1.2　調和振動子 9
1.2.1　強制振動 10
1.3　質点系の力学 12
1.3.1　重心座標と相対座標 13
1.4　剛体 14
1.4.1　剛体のつり合い条件 15
1.4.2　剛体の変位 15
1.4.3　剛体の運動 15
1.4.4　慣性モーメントテンソル 16
1.5　固定軸のない剛体の回転運動 17
1.6　剛体運動の例題 18
1.6.1　剛体の自由回転 18
1.6.2　床を転がるコイン 20
1.7　【付録】 21
1.7.1　線積分 21
1.7.2　微分公式 23

第 2 章　仮想仕事の原理とダランベールの原理　**25**

2.1　最小値問題と変分法 25
2.2　仮想仕事の原理 26
2.2.1　質点系の釣り合い条件 26
2.2.2　束縛条件 26
2.2.3　硬くて滑らかな束縛 27
2.2.4　硬くて滑らかな束縛の下での仮想変位の原理 27
2.3　ダランベールの原理 30

第 3 章　ハミルトンの原理とラグランジュの運動方程式　**31**

3.1　ハミルトンの原理 31
3.1.1　ダランベールの原理とハミルトンの原理の等価性 32

3.2　ラグランジュの運動方程式 33

第 4 章　一般化座標と束縛条件 36
4.1　一般化座標 36
4.1.1　２次元極座標 37
4.1.2　回転座標系 38
4.2　束縛条件 39
4.2.1　ホロノミックな束縛条件の下での運動方程式 40
4.3　ラグランジュの未定乗数法—束縛条件付き変分問題の解法 41
4.3.1　積分条件の場合 41
4.3.2　微分条件の場合 45
4.4　例題 48
4.4.1　単振り子 48
4.4.2　床を転がるコイン 50

第 5 章　対称性と保存則 52
5.1　循環座標と対称性、運動量保存則 52
5.2　時間並進対称性とエネルギー保存則 53
5.3　ネーターの定理 55

第 6 章　微小振動 58
6.1　一自由度の微小振動 58
6.1.1　強制振動 59
6.2　多自由度系の微小振動 60
6.2.1　運動方程式 61
6.2.2　基準座標 63

第 7 章　ハミルトンの正準方程式 66
7.1　正準方程式 66
7.2　変形されたハミルトンの原理 68
7.2.1　ハミルトンの原理と変形されたハミルトンの原理の関係 69
7.2.2　変分原理は微分方程式より基本的な原理か？ 71
7.3　ポアソン括弧式 72
7.4　正準変換 73
7.4.1　正準変換とその母関数 74
7.4.2　母関数による正準変換の導出 76
7.4.3　恒等変換と無限小正準変換 79
7.4.4　正準変換の不変量とリウビルの定理 83
7.5　ポアソン括弧式の性質 84
7.5.1　ポアソンの定理 85
7.5.2　基本括弧式 86
7.5.3　正準変換の不変量としてのポアソン括弧式 88
7.5.4　正準変換の合成と逆変換 88

7.6 【付録】自由度 n の場合の正準変換と基本括弧式の等価性の証明 90

第8章 ハミルトン・ヤコビの理論 **93**
8.1 循環座標 93
8.2 ハミルトン・ヤコビ方程式 94
8.2.1 解の一般形 95
8.2.2 変数分離解 95
8.2.3 解が正準方程式を満たすこと 97
8.3 例題 98
8.3.1 1次元自由粒子 98
8.3.2 放物運動 99
8.3.3 調和振動子 102
8.3.4 中心力場中の平面運動 103
8.4 【付録】n 自由度の場合の証明 104

第A章 付録：速度に依存する力 **106**
A.1 電磁場中の荷電粒子 106
A.1.1 荷電粒子のラグランジュ関数 106
A.1.2 ゲージ不変性 107
A.2 速度に比例した抵抗力 108

第B章 付録：床を転がるコイン **110**
B.1 運動方程式の解法 111
B.2 運動方程式 (1.68) と (4.62) の等価性: 112

第0章　はじめに

この講義では、**解析力学**の基本的な事項について議論します。この講義の基礎となる科目は**力学**および**微積分学**で、受講生はその内容を理解している必要があります。

これは、解析力学の講義をする為に作った講義ノートです。講義中にノートをとる負担を軽減する為に配布します。

解析力学の式変形では、多数の変数に添字がつくので、板書では読みにくいことがあるかもしれません。できるだけ明確に書くように努力しますが、わかりにくい場合にはその場で質問していただくか、この講義ノートで確認してください。

講義に出席せずにノートだけを見ても内容は理解できません。教科書・参考書と講義の内容と合わせて利用して下さい。

以下に、この講義ノートを作成する際に、主に参考にした本をあげておきます。

- 「力学 II –解析力学–」、原島鮮著
- 「古典力学」、ゴールドシュタイン著
- 「力学」、ランダウ・リフシッツ著

第1章　ニュートン力学の復習

解析力学はニュートン力学を数学的に体系化したものである。その議論に入る前に、これまでに習ってきたニュートン力学を復習しておこう。

1.1　ニュートンの運動法則

ニュートン力学は、**質点の運動**に対する以下の 3 つの法則にまとめられる。

第一法則 慣性の法則

第二法則 運動法則

第三法則 作用・反作用の法則

この 3 法則と、万有引力の法則など力を与える法則によって、質点の運動が記述される。

ニュートン力学の際立った特徴は、運動法則が 2 階の微分方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

で与えられていることである[1]。つまり、ある時刻での質点の**位置と速度**

$$\left(\boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) \tag{1.2}$$

が与えられると、その後の質点の運動が決定される。更に、力が位置の関数として与えられていれば[2]、**時間反転対称性**、即ち、ある質点の運動に対して、時間を反転させた運動も、運動方程式 (1.1) の解となっている。

1.1.1　運動量

質点の運動量 $\boldsymbol{p}$ を

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v} \tag{1.3}$$

で定義することによって、運動方程式 (1.1) は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{1.4}$$

と書き換えることができる。解析力学の定式化では、速度 $\boldsymbol{v}$ ではなく運動量 $\boldsymbol{p}$ が基本的な役割を果たす。系の状態は位置と運動量 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ からなる**位相空間**の一点で表され、それを**代表点**という。

[1]第二法則の運動方程式 (1.1) による定式化はオイラーによる。
[2]力が速度の関数であっても、速度の偶関数ならば時間反転対称性は保たれる。

1.1.2　保存力場

ニュートン力学において、**保存力場**という概念は非常に重要である。力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が保存力場であるとは、以下の 3 つのいずれかの条件が満たされている事をいう。

条件 1：仕事が途中経路によらない。 質点が任意の 2 点、点 A から点 B へ経路 C_{AB} に沿って移動する間に、力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ がする仕事 $W(C_{\mathrm{AB}})$

$$W(C_{\mathrm{AB}}) = \int_{C_{\mathrm{AB}}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.5}$$

が、始点 A と終点 B のみに依存し、途中の経路によらない[3]。これは、任意の閉曲線 C に対して

$$\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{1.6}$$

であることと同等である。

条件２：ポテンシャルが存在する。 力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が、スカラー関数 $U(\boldsymbol{r})$ によって

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\, U(\boldsymbol{r}) \tag{1.7}$$

と表される。

条件３：力の場の回転がいたるところでゼロ。

$$^{\forall}\boldsymbol{r} \text{ に対して}\quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.8}$$

これら 3 つの条件は数学的に同等で、どれか一つが成り立てば他の 2 つも成り立つ[4]。

３つの条件の同等性の証明：

- $2 \to 3$： 式 (1.7) を用いて $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の各成分を計算すればよい。

$3 \to 1$ を証明するには、ストークスの定理を用いる。

ストークスの定理：任意のベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, d\ell \tag{1.9}$$

が成り立つ。ただし S は任意の曲面、閉曲線 C は曲面 S の縁（へり）である。

式 (1.9) の左辺は面積分で $\hat{\boldsymbol{n}}$ は曲面 S の表方向を向いた法線ベクトル、右辺は線積分で $\hat{\boldsymbol{t}}$ は閉曲線 C に沿った接線ベクトル。曲面 S の表は、$\hat{\boldsymbol{t}}$ 方向に右ねじを回したときに進む方向の面と定義する。

[3] この積分は**線積分**と呼ばれ、曲線の経路 C_{AB} に対して定義されている（この章の 1.7.1 節【付録】参照）。

[4] この 3 つの条件が同等であるためには、考えている領域が**単連結**である必要がある。単連結領域とは、領域内の任意の閉曲線が 1 点に連続的に縮められるような領域をいう。

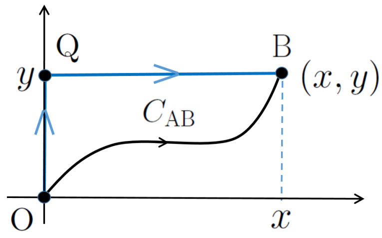

図 1.1: 積分路

- $3 \to 1$: rot $\boldsymbol{F}=0$ より、式 (1.9) を用いて直ちに式 (1.6) が示される。
- $1 \to 2$: 式 (1.5) において、始点 A を原点 O に取り固定し、終点 B の座標を $\boldsymbol{r}=(x,y)$ とする[5]。すると、式 (1.5) の積分は終点の座標 $\boldsymbol{r}$ のみに依存するので、$\boldsymbol{r}$ の関数 $U(\boldsymbol{r})$ を

$$U(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{C_{\mathrm{OB}}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' \tag{1.10}$$

と定義する。この関数が式 (1.7) を満たすことを示す。

積分の経路 C_{OB} は始点と終点以外は任意にとっても積分値が変わらないので、点 Q を $(0,y)$ として、積分経路を折れ線

$$C_{\mathrm{OB}} = \mathrm{OQ}+\mathrm{QB}$$

にとる（図 1.1）。すると、

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\mathrm{OQ}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' - \int_{\mathrm{QB}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'$$

となるが、経路 OQ は y 軸に平行、経路 QB は x 軸に平行なので、これは

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_0^y F_y(0,y')\,dy' - \int_0^x F_x(x',y)\,dx'$$

と表される。両辺を x で偏微分すると、右辺は積分の上限の微分なので、

$$\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x F_x(x',y)\,dx' = -F_x(x,y)$$

をえる。$\partial U/\partial y$ も同様に計算できる。

以上、$1 \to 2 \to 3 \to 1$ が示されたので、これらを合わせると、$1 \rightleftarrows 2$、$2 \rightleftarrows 3$、$3 \rightleftarrows 1$ であることが分かる。即ち、3 つの条件は同等である。■

問題 1.1 条件 (1.5) と条件 (1.6) が同等であることを説明せよ。

問題 1.2 力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が式 (1.7) で与えられるとき、rot $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の各成分を計算せよ。

問題 1.3 ストークスの定理の式 (1.9) の両辺の積分の意味を説明せよ。

問題 1.4 上と同様に、$\dfrac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y} = -F_y(x,y)$ を示せ。
〔ヒント〕 点 P を $(x,0)$ として、経路 C_{OB} を OP + PB ととれ。

[5] 簡単のために 2 次元で説明する。

1.1.3　力学的エネルギー

力の場 $\boldsymbol{F}$ が保存力場であるときには、**力学的エネルギー保存則**が成り立っている。

証明： 運動方程式 (1.1) は、両辺に $d\boldsymbol{r}/dt$ との内積を取ることによって、以下のように t で積分可能である。

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= -\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r}) \\
m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= -\left(\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r})\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 + U(\boldsymbol{r})\right] &= 0
\end{aligned}
$$

これより

$$
\therefore \quad E \equiv \frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 + U(\boldsymbol{r}) \tag{1.11}
$$

が時間によらず一定であることがわかる。 ■

この式 (1.11) で与えられる E を、**エネルギー積分**、または、**力学的エネルギー**という。

1.1.4　角運動量

質点の**角運動量** $\boldsymbol{L}$ は、

$$
\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{1.12}
$$

によって定義される。定義式 (1.12) に位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ がそのまま入っていることから明らかなように、角運動量 $\boldsymbol{L}$ は座標原点 O のとり方に依存する。

角運動量の時間変化は、運動方程式 (1.4) を用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\right) \\
&= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \\
&= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{N}
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

で与えられる。ここで定義した $\boldsymbol{N}$ は、**力のモーメント**と呼ばれる。

特に、力が位置ベクトルに平行

$$
\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{r} \tag{1.14}
$$

である力の場は、**中心力場**と呼ばれている。その場合には

$$
\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = 0
$$

なので、

$$
\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \tag{1.15}
$$

即ち、角運動量は保存する。

問題 1.5 2つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が平行の時、その外積がゼロ、即ち $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$ であることを示せ。

問題 1.6 力の場 $\boldsymbol{F}$ が保存力で、そのポテンシャルが $r=|\boldsymbol{r}|$ のみの関数 $U(r)$ のとき、中心力場であることを示せ。

1.1.5 保存則

力学における重要な保存則として、

(i) エネルギー保存則、(ii) 運動量保存則、(iii) 角運動量保存則

がある。ニュートン力学の定式化では、これらはそれぞれ、

(i) 保存力、(ii) 第三法則（作用・反作用の法則）、(iii) 中心力

から個別に導かれ、統一的に理解するのは難しい。一方、解析力学による定式化では、これらの保存則は全て系の持つ対称性から導き出される。

1.2 調和振動子

釣り合い位置を原点として、そこからの変位 x に比例する復元力が働く振動子を**調和振動子**という。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \tag{1.16}$$

で与えれれ、その一般解は

$$x(t)=A\cos\left(\omega_0 t+\theta\right); \qquad \omega_0\equiv\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.17}$$

である。ここで、A 及び θ は積分定数で、それぞれ**振幅**および**初期位相**と呼ばれ、初期条件で決まる。

複素関数を使った運動方程式の解法： 運動方程式 (1.16) は**定数係数の線形常微分方程式**なので、その場合、一般に $e^{\lambda t}$ の形の解があることは容易に理解できる。λ の満たすべき方程式は**特性方程式**と呼ばれる。今の場合、特性方程式とその解は

$$\lambda^2+\omega_0^2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm i\omega_0 \tag{1.18}$$

となり、λ は虚数となる。これから、式 (1.16) の一般解は、

$$x(t)=C_1\,e^{i\omega_0 t}+C_2\,e^{-i\omega_0 t} \tag{1.19}$$

で与えられる。ここで、C_1 と C_2 は積分定数である。

任意の複素数 C_1 および C_2 に対して、式 (1.19) で与えられる $x(t)$ は微分法定式 (1.16) を満たす。しかし x は、今の問題では振動子の変位を表

すので、実数でなければならない。即ち、積分定数 C_1 および C_2 は全く任意はなく、x が実数になるように選ばなければならない。

今の場合、方程式 (1.16) は**実数係数**の同次線形微分方程式なので、複素数の解 $x_c(t)$ が求まれば、それから実数の解は簡単に求まる。即ち、複素解の実部 $\mathrm{Re}[x_c(t)]$ および虚部 $\mathrm{Im}[x_c(t)]$ も、同じ方程式の解なのである。実際、$C = Ae^{i\theta}$ として、複素解 $x_c(t) = Ce^{i\omega t}$ の実部を取ると実関数の解 (1.17) を得る。

問題 1.7 式 (1.19) で与えられる $x(t)$ が実数であるためには、積分定数 C_1 と C_2 はどのような関係を満たさなければならないか？
［ヒント］任意の t に対して $x(t) = x^*(t)$ でなければならない。

問題 1.8 実数解 (1.17) は、複素解 (1.19) で C_1 と C_2 をどう取ったものに相当するか？

問題 1.9 $x_c(t)$ が微分方式 (1.16) の複素数の解とすると、その実部 $\mathrm{Re}[x_c(t)]$ も虚部 $\mathrm{Im}[x_c(t)]$ も、どちらも式 (1.16) を満たすことを示せ。

問題 1.10 $C = Ae^{i\theta}$ として、複素解 $x_c(t) = Ce^{i\omega t}$ の実部を取ると、実数の解 (1.17) が得られることを確かめよ。

1.2.1 強制振動

調和振動子 (1.16) に、速度に比例した抵抗と振動外力のある場合を考える。系の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F\cos\omega t \tag{1.20}$$

で与えられるとする。複素解を求めて、その実部を取ることによってこの方程式を解きたい。そのために、振動外力の項を、実部が運動方程式 (1.20) の外力項になる複素関数で置き換えた微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = Fe^{i\omega t} \tag{1.21}$$

を考える。

方程式 (1.20) あるいは (1.21) は**線形非同次方程式**なので、その一般解 $x(t)$ は、特殊解 $x_1(t)$ と、非同次項をゼロとした同次方程式の一般解 $x_0(t)$ の和

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) \tag{1.22}$$

で与えられる。以下では、方程式 (1.21) の特殊解 $x_1(t)$ を求める。解の形を

$$x_1(t) = Ce^{i\omega t} \tag{1.23}$$

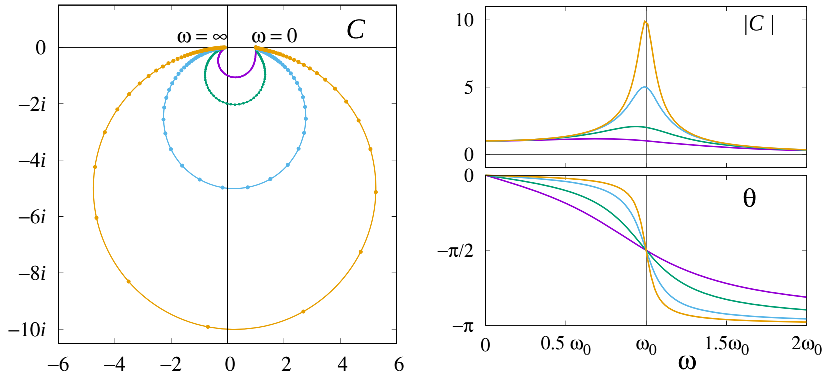

図 1.2: 外力の角速度 ω をパラメタとして、複素係数 C を複素平面内にプロットしたもの（左図）、およびその振幅 $|C|$ と位相 θ の ω 依存性（右図）。ω_0 は調和振動子の角速度で、抵抗係数は γ =1, 0.5, 0.2, 0.1 $m\omega_0$ とした。グラフ中の数字は、時間、長さ、質量の単位をそれぞれ ω_0^{-1}、$F/(\omega_0^2 m)$、m に取ったもの。

と置くと、これを式 (1.21) に代入することにより、

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{F}{m\bigl(-\omega^2 + i\gamma\omega/m + \omega_0^2\bigr)} \\
&= \frac{F}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\gamma\omega/m\right)^2} \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

を得る。ただし、ω_0 は、式 (1.17) で定義されている。複素係数 C の絶対値 $|C|$ と偏角 θ は

$$
|C| = \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\gamma\omega/m\right)^2}} \qquad (1.25)
$$

$$
\theta = \operatorname{Arg} C \equiv \operatorname{atan2}\left(-\gamma\omega/m,\ \omega_0^2 - \omega^2\right) \qquad (1.26)
$$

で与えられる。元の方程式 (1.20) の実関数の解は式 (1.23) の実部、

$$
x_1(t) = \operatorname{Re}\left[Ce^{i\omega t}\right] = |C|\cos(\omega t + \theta) \qquad (1.27)
$$

で与えられる。即ち、C の絶対値 $|C|$ は振動の振幅、偏角 θ は外力に対して振動の位相どれだけ進んでいるかを表す。

図 1.2 に、複素係数 C の外力の振動数 ω 依存性を、様々な γ の値に対してプロットしたものを示す。抵抗係数 γ が小さいと、$\omega \approx \omega_0$ で振動子の振幅が非常に大きくなることが分かる。これを**共鳴**という。また、$\omega > 0$ とすると C の虚部は負なので、偏角は $\theta < 0$ となり、外力の位相に比べて振動子の変位の位相が遅れていることが分かる[6]。

問題 1.11 図 1.2 を見ると、外力の角速度 ω が振動子の固有角速度 ω_0 に比べて小さい時には位相の遅れは小さく、大きい時には振動子の位相は $\theta \approx -\pi$、即ちほぼ半周期遅れ、逆位相となることが分かる。このことを直感的に説明せよ。

[6]偏角 θ は主値 $-\pi < \theta \leqq \pi$ を取るとする

問題 1.12 微分方程式 (1.21) の複素解 (1.23) の虚部は、どのような方程式の解になっているか？

問題 1.13 線形非同次方程式の一般解[7]は、対応する同次方程式の一般解に非同次方程式の特殊解を足したもので与えられることを示せ。

問題 1.14 方程式 (1.20) の非同次項をゼロとした同次方程式の一般解 $x_0(t)$ を求めよ。

1.3 質点系の力学

相互作用する質点系を考える。i 番目の質点の質量を m_i、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とする。質点 i に働く外力を $\boldsymbol{F}_i$、質点 j が質点 i に及ぼす力を $\boldsymbol{F}_{ij}$ とする。質点 i の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_i \tag{1.28}$$

である。すべての質点の運動方程式を足し合わせると、

$$\sum_i m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \right) + \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{1.29}$$

をえる。作用反作用の法則

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij} \tag{1.30}$$

より、右辺第 1 項はゼロとなるので、全運動量 $\boldsymbol{P}_T$、および全外力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$

$$\boldsymbol{P}_T \equiv \sum_i \boldsymbol{p}_i, \qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} \equiv \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{1.31}$$

を用いて、式 (1.29) は

$$\frac{d\boldsymbol{P}_T}{dt} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} \tag{1.32}$$

と表される。即ち、全運動量の時間変化は全外力に等しく、内力には依存しない。特に、外力の和がゼロの場合には全運動量は保存する。

質点 i の角運動量 $\boldsymbol{L}_i \equiv \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ の時間変化は

$$\frac{d\boldsymbol{L}_i}{dt} = \boldsymbol{r}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_i \right)$$

で与えられるので、全角運動量

$$\boldsymbol{L}_T \equiv \sum_i \boldsymbol{L}_i \tag{1.33}$$

[7]一般解とは、微分方程式の階数と同じ数の任意定数（積分定数）を含む解をいう。

の時間変化は

$$\frac{d\boldsymbol{L}_T}{dt} = \sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{1.34}$$

に従う。右辺第 1 項は、質点間相互作用が中心力

$$\boldsymbol{F}_{ij} \parallel \left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\right) \tag{1.35}$$

のときにはゼロとなることが示されるので（問題 1.16 参照)、結局

$$\frac{d\boldsymbol{L}_T}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \equiv \boldsymbol{N}_{\text{ext}} \tag{1.36}$$

となる。ここで $\boldsymbol{N}_{\text{ext}}$ は外力による力の全モーメントである。

問題 1.15 作用反作用の法則 (1.30) より、式 (1.29) の右辺第 1 項がゼロになることを示せ。

問題 1.16 作用反作用の法則 (1.30) を用いて、式 (1.34) の右辺第 1 項が

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

となることを示せ。

1.3.1 重心座標と相対座標

質点系の**重心**（または**質量中心**）$\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i; \quad M \equiv \sum_i m_i \tag{1.37}$$

で定義される。重心を原点とした時の各質点の相対座標 $\tilde{\boldsymbol{r}}_i$ を

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_i \equiv \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R} \tag{1.38}$$

と定義する。すると、全運動量は

$$\boldsymbol{P}_T = \sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = M \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} \tag{1.39}$$

と表される。即ち、

> 質点系の全運動量は、全質量 M が重心に集中して運動した時の運動量に等しい。

同様に、全角運動量 $\boldsymbol{L}_T$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_T &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \left(\tilde{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{R}\right) \times m_i \left(\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\boldsymbol{d}t} + \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\right) \\ &= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}_T + \sum_i \tilde{\boldsymbol{r}}_i \times \left(m_i \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\right) \equiv \boldsymbol{L}_{\text{CM}} + \boldsymbol{L}' \end{aligned} \tag{1.40}$$

と表される。即ち、

> 質点系の全角運動量は、全質量が重心に集中して運動した場合の角運動量 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{CM}}$ と、重心の周りの角運動量 $\boldsymbol{L}'$ の和

となる。$\boldsymbol{L}_{\mathrm{CM}}$ と $\boldsymbol{L}'$ は、それぞれ運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{CM}}, \qquad \frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{N}' \tag{1.41}$$

に従う。ここで、

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{CM}} \equiv \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}, \qquad \boldsymbol{N}' \equiv \sum_i \tilde{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{1.42}$$

で、それぞれ、重心におよび相対座標に働く外力のモーメントである。

全運動エネルギー K_T は

$$\begin{aligned} K_T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \left(\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} \right)^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt} \right)^2 \equiv K_{\mathrm{CM}} + K' \end{aligned} \tag{1.43}$$

と表される。即ち、

> 質点系の全運動エネルギーは、全質量が重心に集中して運動した場合の運動エネルギー K_{CM} と、重心から見た時の運動エネルギー K' の和

となる。

問題 1.17 式 (1.40) の 2 行目の最初の等号を示せ。

問題 1.18 式 (1.41) を示せ。

問題 1.19 式 (1.43) を示せ。

1.4 剛体

系を構成する質点の相対位置が不変で、系の運動が全体の並進と回転だけで記述されるような質点系を**剛体**という。剛体内の質点間には相対位置を不変に保つための**拘束力**（**束縛力**）が働いている。しかし、この場合の拘束力は内力なので、系全体の並進運動と回転運動は式 (1.32) と (1.36) によって、系に働く外力のみで記述される。また、全運動量、全角運動量、全運動エネルギーは、それぞれ式 (1.39), (1.40), (1.43) によって、重心運動とその周りの回転運動による部分に分解できる。

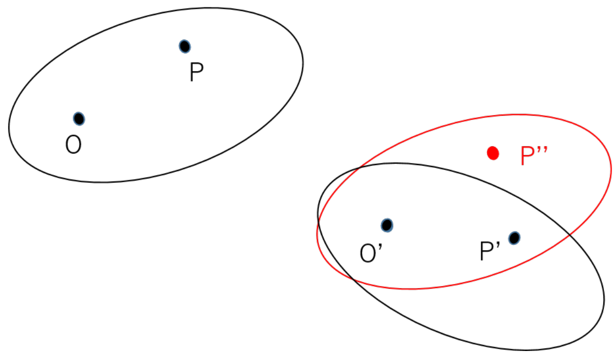

図 1.3: 剛体の変位：剛体の任意の変位は、任意の点の並進とその点の回りの回転で表される。

1.4.1　剛体のつり合い条件

つり合い状態では静止していることから

$$\frac{d\boldsymbol{P}_T}{dt} = 0, \qquad \frac{d\boldsymbol{L}_T}{dt} = 0$$

でなければならない。これより、剛体のつり合い条件は、

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} = 0, \qquad \boldsymbol{N}_{\mathrm{ext}} = 0$$

即ち、剛体に働く全外力および外力の力モーメントがゼロとなることである。

1.4.2　剛体の変位

剛体に固定された 2 つの点、基準点とそれとは別の点を考える。最初、基準点は O、もう一つの点は P にあったが、剛体が移動して、それぞれの点は O′ と P′ に移動したとする（図 1.3 参照)。

その移動に伴う点の変位 $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ は、O から O′ への剛体の並行変位と、O′ の周りの回転変位に分解できる。即ち、剛体を並行移動させて基準点を O′ に一致させたとき、点 P は P″ へ移動したとする。すると、

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = \overrightarrow{\mathrm{PP''}} + \overrightarrow{\mathrm{P''P'}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{P''P'}}$$

と表されるが、変位 $\overrightarrow{\mathrm{P''P'}}$ は、$\overrightarrow{\mathrm{O'P''}}$ の点 O′ を通るある軸の周りの剛体回転による変位として表される。

1.4.3　剛体の運動

点 O を通る固定軸の周りを剛体が角速度 ω で回転運動をしているとする。回転軸に平行で回転に対して右ねじの向きを向いた大きさ ω のベクトルを**角速度ベクトル** $\boldsymbol{\omega}$ と呼ぶ。すると点 P の速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}}$ は、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いて

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

と表される。一般の剛体運動に対して、

剛体の任意の点の速度は、剛体の任意の基準点 O の速度と、
その基準点回りの回転運動による速度の和

で表される。即ち、

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}} \tag{1.44}$$

となる。更に、

剛体の角速度は基準点の選び方に依らない

ことが示される。

問題 1.20 基準点を O としたとき、その回りの剛体回転の角速度を $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{O}}$、基準点を O′ としたときの同じ剛体回転の角速度を $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{O}'}$ とする。式 (1.44) による任意の点 P の速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}}$ が基準点に依らないことを用いて、$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{O}'}$ を示せ。［ヒント］ $\boldsymbol{V}_{\mathrm{O}'} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{O}} \times \overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO}'} + \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{P}}$ を用いよ。

1.4.4 慣性モーメントテンソル

剛体を構成する質点の相対位置は不変なので、剛体が固定点 O の回りに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているときの、剛体の角運動量および運動エネルギーは以下のように表される。

剛体を構成する質点 i の質量を m_i、固定点 O からの相対座標を $\tilde{\boldsymbol{r}}_i$ とすると、質点 i の速度 $\boldsymbol{v}_i$ は式 (1.44) より

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}}_i \tag{1.45}$$

と表される。ここで、固定点 O の速度はゼロ $\boldsymbol{V}_{\mathrm{O}} = 0$ を用いた。

剛体の固定点 O の回りの角運動量 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} &= \sum_i \tilde{\boldsymbol{r}}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \ = \sum_i \tilde{\boldsymbol{r}}_i \times m_i \big(\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}}_i\big) \\ &= \sum_i m_i \Big(\tilde{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{r}}_i \big(\tilde{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{\omega}\big)\Big) \equiv \hat{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{1.46}$$

と表される。ここで、$\hat{I}$ は**慣性モーメントテンソル**と呼ばれる 3 行 3 列の対称行列で、

$$\hat{I} = \sum_i m_i \begin{pmatrix} \tilde{y}_i^2 + \tilde{z}_i^2, & -\tilde{x}_i \tilde{y}_i, & -\tilde{x}_i \tilde{z}_i \\ -\tilde{y}_i \tilde{x}_i, & \tilde{z}_i^2 + \tilde{x}_i^2, & -\tilde{y}_i \tilde{z}_i \\ -\tilde{z}_i \tilde{x}_i, & -\tilde{z}_i \tilde{y}_i, & \tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2 \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

で与えられる。

同様に、剛体の運動エネルギー K_{O} は

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{O}} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \ = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \big(\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}}_i\big) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\sum_i \tilde{\boldsymbol{r}}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \right) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} \ = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \cdot \hat{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{1.48}$$

のように、慣性モーメントテンソル $\hat{I}$ を用いて表される。ここで、$\boldsymbol{\omega}^t$ は縦ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を転置した横ベクトルとする。

固定点のない一般の剛体運動の場合には、質点系の角運動量および運動エネルギーは式 (1.40) および (1.43) のように、重心運動と重心回りの運動の寄与に分解できるので、重心 G からの相対座標で定義した**重心回りの慣性モーメントテンソル** $\hat{I}_G$ を用いて、

$$\boldsymbol{L}_T = \boldsymbol{L}_{\mathrm{CM}} + \hat{I}_G \cdot \boldsymbol{\omega}, \qquad K_T = K_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t \cdot \hat{I}_G \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{1.49}$$

と表される。

剛体を構成する質点の相対位置は固定されているので、座標軸が剛体に固定された座標系を用いて慣性モーメントテンソルを定義すると、それは時間に依存しない。慣性モーメントテンソルは対称行列なので座標軸の方向をうまくとることによって対角行列とすることができる。このような座標軸を**慣性主軸**、対角成分を**主慣性モーメント**と呼ぶ。

特に、剛体が固定軸 ℓ の周りに回転している場合には、軸 ℓ に平行な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として、角速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{n}$$

と表されるので、剛体の運動エネルギー K および軸 ℓ 回りの角運動量 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}$ はそれぞれ

$$K = \frac{1}{2} I_\ell\, \omega^2, \qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L} = I_\ell\, \omega \tag{1.50}$$

と表される。ここで、I_ℓ は回転軸 ℓ 周りの慣性モーメント

$$I_\ell \equiv \boldsymbol{n}^t \cdot \hat{I} \cdot \boldsymbol{n} = \sum_i m_i \Big(\tilde{r}_i^2 - \big(\tilde{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{n}\big)^2 \Big) = \sum_i m_i\, \tilde{r}_{i,\perp}^2 \tag{1.51}$$

である。ここで、$\tilde{r}_{i,\perp}$ は質点 i の軸 ℓ までの距離である[8]。

1.5 固定軸のない剛体の回転運動

固定軸のない一般の剛体の運動は、重心の並進運動と重心回りの回転運動によって記述され、運動方程式は、式 (1.32), (1.39), (1.41) より、重心座標 $\boldsymbol{R}$ と重心回りの角運動量 $\boldsymbol{L}'$ を用いて、

$$M\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}, \qquad \frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{N}' \tag{1.52}$$

と与えられる。ここで、$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ は剛体に働く外力、$\boldsymbol{N}'$ は重心回りの力のモーメントである。

[8]座標原点 O は回転軸 ℓ 上にあることに注意。

第 1 式は質点の運動方程式と同じなので、この節では、第 2 式で表される重心回りの回転運動に注目しよう。以下では $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}=\boldsymbol{R}=0$ として、$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{N}'=\boldsymbol{N}$ と表す：

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}. \tag{1.53}$$

ここで、運動を記述するのに剛体の重心を原点とする 2 つの座標系を考える：一つは慣性座標系で xyz 系とし、もう一つは剛体に固定された座標系で XYZ 系とし座標軸を慣性主軸に取る。すると XYZ 系での剛体の慣性モーメントテンソルを $\hat{I}$ とすると、それは時間によらず対角成分しかない。

剛体の角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いて

$$\boldsymbol{L}=\hat{I}\cdot\boldsymbol{\omega}=I_X\omega_X\hat{\boldsymbol{e}}_X+I_Y\omega_Y\hat{\boldsymbol{e}}_Y+I_Z\omega_Z\hat{\boldsymbol{e}}_Z \tag{1.54}$$

と表される。ただし、$\big(\hat{\boldsymbol{e}}_X,\hat{\boldsymbol{e}}_Y,\hat{\boldsymbol{e}}_Z\big)$ は XYZ 系における基底ベクトルとする。$\boldsymbol{L}$ の時間微分は、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial t}\right)_{XYZ}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L} \tag{1.55}$$

と表される。ただし、XYZ 系におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の見かけの時間変化を

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)_{XYZ}:=\frac{dA_X}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_X+\frac{dA_Y}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_Y+\frac{dA_Z}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_Z \tag{1.56}$$

と定義した。

式 (1.55) を式 (1.53) に用いて、XYZ 系の成分で書くと、

$$\begin{cases} I_X\dfrac{d\omega_X}{dt}-\big(I_Y-I_Z\big)\omega_Y\omega_Z &=N_X\\ I_Y\dfrac{d\omega_Y}{dt}-\big(I_Z-I_X\big)\omega_Z\omega_X &=N_Y\\ I_Z\dfrac{d\omega_Z}{dt}-\big(I_X-I_Y\big)\omega_X\omega_Y &=N_Z\end{cases} \tag{1.57}$$

をえる。これは**オイラーの運動方程式**と呼ばれている。

問題 1.21 式 (1.55) を示せ。［ヒント］$\hat{\boldsymbol{e}}_X$ は剛体に固定されたベクトルなので、その時間変化は式 (1.45) と同様に $d\hat{\boldsymbol{e}}_X/dt=\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_X$ と与えられる。

問題 1.22 式 (1.57) を導け。

1.6 剛体運動の例題

1.6.1 剛体の自由回転

外力のない剛体の自由回転を考える。この場合、角運動量保存則から $\boldsymbol{L}$ が一定になるが、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は一定でないので、回転運動は複雑なものになりうる。主慣性モーメントの大きさが

$$I_X<I_Y<I_Z \tag{1.58}$$

を満たすとして、それぞれの回転主軸の周りの回転の安定性を考察する。

考える運動方程式は、式 (1.57) で $\boldsymbol{N}=0$ として、

$$\begin{cases} I_X \dfrac{d\omega_X}{dt} - \bigl(I_Y - I_Z\bigr)\omega_Y\omega_Z &= 0 \\ I_Y \dfrac{d\omega_Y}{dt} - \bigl(I_Z - I_X\bigr)\omega_Z\omega_X &= 0 \\ I_Z \dfrac{d\omega_Z}{dt} - \bigl(I_X - I_Y\bigr)\omega_X\omega_Y &= 0 \end{cases} \tag{1.59}$$

である[9]。

X 軸回りの回転の安定性： ω_X が一定で $\omega_Y=\omega_Z=0$ の X 軸周りの回転は式 (1.59) の解であるが、$\omega_X \gg \omega_Y,\ \omega_Z$ の場合の回転の安定性を調べよう。

ω_Y, ω_Z の 1 次までの近似で考える。すると、式 (1.59) の第 1 式より

$$\frac{d\omega_X}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_X = \omega_0 \text{（定数）} \tag{1.60}$$

なので、第 2 式および第 3 式は

$$\frac{d\omega_Y}{dt} = \frac{I_Z - I_X}{I_Y}\omega_0\,\omega_Z, \qquad \frac{d\omega_Z}{dt} = -\frac{I_Y - I_X}{I_Z}\omega_0\,\omega_Y$$

となる。これを解いて、

$$\omega_Y = A\cos\left(\sqrt{\frac{(I_Z - I_X)(I_Y - I_X)}{I_Y I_Z}}\,\omega_0\bigl(t - t_0\bigr)\right), \tag{1.61}$$

$$\omega_Z = -A\sqrt{\frac{I_Y(I_Y - I_X)}{I_Z(I_Z - I_X)}}\sin\left(\sqrt{\frac{(I_Z - I_X)(I_Y - I_X)}{I_Y I_Z}}\,\omega_0\bigl(t - t_0\bigr)\right) \tag{1.62}$$

をえる。ここで、A および t_0 は積分定数。これより、初期の ω_Y, ω_Z が ω_X に比べて小さければ、時間が経っても小さいままにとどまり、X 軸回りの回転は安定であることがわかる。

Y 軸回りの回転の安定性： 次に、Y 軸回りの回転運動の安定性を調べよう。初期の角速度が $\omega_Y \gg \omega_X,\ \omega_Z$ であるとする。今度は、ω_X と ω_Z の 1 次までの近似で、

$$\frac{d\omega_Y}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_Y = \omega_0 \text{（定数）} \tag{1.63}$$

となり、ω_X と ω_Z は

$$\frac{d\omega_X}{dt} = -\frac{I_Z - I_Y}{I_X}\omega_0\,\omega_Z, \qquad \frac{d\omega_Z}{dt} = -\frac{I_Y - I_X}{I_Z}\omega_0\,\omega_X$$

[9]剛体の自由回転のウェブシミュレーターを
http://hnakanishi.cloudfree.jp/ThreeJS/Rigid_Body_free_rotation/Rigid_Body_rotation.html
に置いておく。

を満たし、これを解くと

$$\omega_X = A\cosh\left(\sqrt{\frac{(I_Z - I_Y)(I_Y - I_X)}{I_X I_Z}}\,\omega_0\big(t - t_0\big)\right), \tag{1.64}$$

$$\omega_Z = -A\sqrt{\frac{I_X(I_Y - I_X)}{I_Z(I_Z - I_Y)}}\sinh\left(\sqrt{\frac{(I_Z - I_Y)(I_Y - I_X)}{I_X I_Z}}\,\omega_0\big(t - t_0\big)\right) \tag{1.65}$$

をえる。ここで、A および t_0 は積分定数。今度は、初期の ω_X, ω_Z が ω_Y に比べて小さくとも、時間とともに ω_X, ω_Z がどんどん大きくなり、いずれ、$\omega_Y \gg \omega_X,\ \omega_Z$ として近似が成り立たなくなることがわかる。すなわち、Y 軸回りの回転は不安定である。

Z 軸回りの回転の安定性： 同様の解析で、Z 軸回りの回転は安定であることが示される。

以上の結果をまとめると、3 つの主慣性モーメントが異なる値を持つとき、最大と最小の主慣性モーメントの軸の周りの回転運動は安定であるが、種慣性モーメントが中間の大きさの軸の周りの回転は不安定であることがわかる。

問題 1.23 Z 軸周りの回転が安定であることを確かめよ。

1.6.2 床を転がるコイン

剛体運動の例題として、滑らずに床を転がるコインの運動を考えよう。コインの半径を a、質量を M とし、その厚さは無視する。コインの中心を原点、コインの面内に $X-Y$ 軸を取り、コインに垂直に Z 軸を取ると、重心まわりの慣性モーメントテンソル $\hat{I}$ は対角成分のみを持ち、

$$\hat{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}Ma^2, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4}Ma^2, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}Ma^2 \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

で与えられる。

コインの重心の速度を $\boldsymbol{v}$、回転の角速度を $\boldsymbol{\omega}$ とすると、並進運動及び回転運動に対する運動方程式は、

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} \tag{1.67}$$

$$\frac{d}{dt}\big(\hat{I}_G \cdot \boldsymbol{\omega}\big) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{R} \tag{1.68}$$

で与えられる。ただし、$\boldsymbol{R}$ は床からの抗力、$\boldsymbol{c}$ は重心から床との接点へ向かうベクトル、$\boldsymbol{g}$ は重力の加速度ベクトルである。

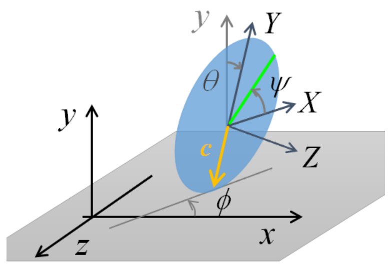

図 1.4: 床を転がるコイン

コインが滑らず転がるとすると、床との接点のコインの速度はゼロであるから、式 (1.44) より

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c} \tag{1.69}$$

が成り立つ。

未知変数は $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{R}$ および角度 (θ, ϕ, ψ) で、方程式 (1.67)、(1.68)、(1.69) と、角度の時間微分と $\boldsymbol{\omega}$ の関係式から運動を解くことができる（付録 B 参照）[10]。

1.7 【付録】

1.7.1 線積分

経路 C_{AB} に沿った仕事 (1.5) は、力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ と経路 C_{AB} に沿った変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ との内積の積分で、**線積分**

$$\int_{C_{\mathrm{AB}}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.70}$$

で表される。経路 C_{AB} は、始点 A から終点 B へ至る向きを指定した曲線である（図 1.5）。

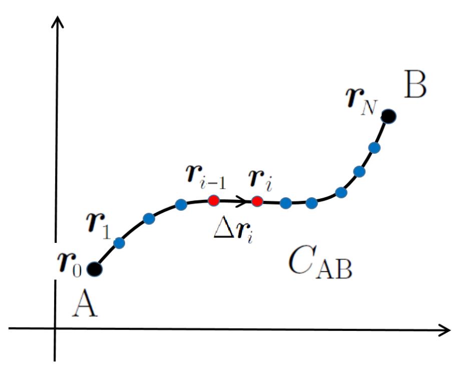

図 1.5: 線積分の経路 C_{AB}

[10] この転がるコインの運動方程式を数値的に解くウェブシミュレータを
http://hnakanishi.cloudfree.jp/ThreeJS/Rolling_Coin/Rolling_Coin.html
に置いておく。

始点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0$、終点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_N$ とし、その間を N 分割し、i 番目の分割点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ としよう。$\boldsymbol{r}_{i-1}$ から $\boldsymbol{r}_i$ へ至る変位ベクトルを

$$\Delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1} = (\Delta x_i, \Delta y_i) \tag{1.71}$$

と定義すると、線積分 (1.70) は

$$\begin{aligned}\int_{C_{\mathrm{AB}}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} &\equiv \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big(F_x(x_i,y_i)\Delta x_i + F_y(x_i,y_i)\Delta y_i\Big)\end{aligned} \tag{1.72}$$

の極限で定義される。

経路が直線の場合：　いま、経路 C_{AB} の始点 A と終点 B の座標が

$$\mathrm{A} : (x_A, Y), \qquad \mathrm{B} : (x_B, Y)$$

のように y 座標がどちらも同じ値 Y で、経路 C_{AB} はそれらを結ぶ x 軸に平行な直線の場合を考える（図 1.6 の左）。すると分割点は

$$\boldsymbol{r}_i = (x_i, Y)$$

で与えられるので、経路 C_{AB} に沿った変位ベクトル

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}_i &= \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1} \\ &= (x_i - x_{i-1}, 0) \quad \equiv (\Delta x_i, 0)\end{aligned}$$

は x 軸に平行なベクトルとなる。その結果、線積分 (1.72) は

$$\int_{C_{\mathrm{AB}}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} F_x(x_i, Y)\Delta x_i = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x,Y)dx \tag{1.73}$$

となり、力の x 成分 $F_x(x,Y)$ についての変数 x についての、区間 x_A から x_B までの通常の積分で表される事がわかる。

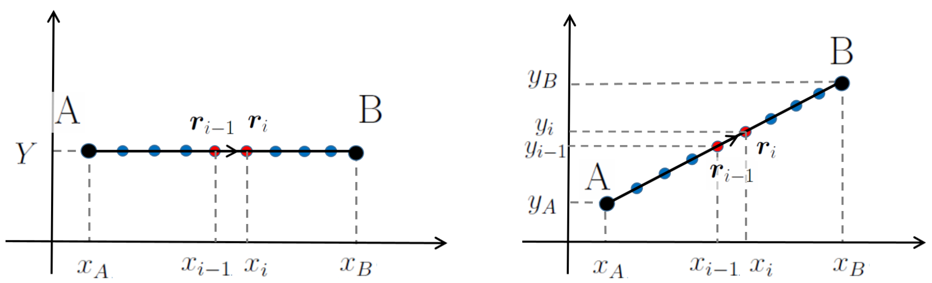

図 1.6: x 軸に平行な直線経路（左）と傾いた直線経路（右）

経路がパラメタの関数として表されている場合：　経路 C_{AB} がパラメタ $s \in [a, b]$ を用いて、関数

$$\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s)); \qquad \boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}_A, \quad \boldsymbol{r}(b) = \boldsymbol{r}_B \tag{1.74}$$

で表されている場合には、線積分 (1.70) は、以下のようにパラメタ s の積分で表される。即ち、経路 C_{AB} 上の分割点は、パラメタを用いて

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(s_i)$$

で与えられ、変位ベクトルは

$$\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(s_i) - \boldsymbol{r}(s_{i-1}) \approx \left.\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\right|_{s=s_i} \Delta s_i; \quad \Delta s_i \equiv s_i - s_{i-1}$$

と表される。従って、式 (1.72 は

$$\begin{aligned}
\int_{C_{\mathrm{AB}}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &\equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(s_i)\big) \cdot \left.\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\right|_{s=s_i} \Delta s_i \\
&= \int_a^b \left(\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(s)\big) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \right) ds
\end{aligned} \tag{1.75}$$

となる。この被積分関数はベクトルの内積だが、$\boldsymbol{r}(s)$ が具体的に与えられればパラメタ s の関数として得られるので、式 (1.75) は変数 s についての通常の積分として実行できる。

問題 1.24 図 1.6 の右のように、経路 C_{AB} が傾き a の直線の場合、線積分 (1.70) はどう表されるか。

問題 1.25 力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ と経路 C_{AB} が

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = K\left(\frac{1}{2}x^2, xy\right), \quad C_{AB} : \boldsymbol{r}(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta); \quad \theta \in [0, \pi]$$

のとき、線積分 $\displaystyle\int_{C_{AB}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。ただし、K および R は定数。

1.7.2 微分公式

解析力学では、様々な微分公式を多用するので、以下にまとめておく。以下では、一変数関数 $f(x)$ の微分、および 2 変数関数 $F(x, y)$ の偏微分を

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx}, \qquad F_x(x, y) \equiv \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \qquad F_y(x, y) \equiv \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

と記す。

1. 合成関数の微分公式：2 つの一変数関数を $f(x)$ および $g(x)$ として、

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) g'(x)$$

2. 積の微分公式：

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

3. ２変数関数の合成関数の微分：

$$\frac{d}{dx}F\big(f(x), g(x)\big) = F_x(f, g)f'(x) + F_y(f, g)g'(x)$$

ただし、$F_x\big(f(x), g(x)\big)$ を $F_x(f, g)$ などと略記した。

4. 定積分の微分：

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$$

問題 1.26 以下の積分の微分はどう表されるか？

$$\frac{d}{dx}\int_0^x F\big(t, g(x)\big)dt$$

第2章　仮想仕事の原理とダランベールの原理

ニュートン力学では運動法則を微分方程式で記述する。解析力学ではこれを変分原理から導く。即ち、質点の軌道の微小な変化（変位）に対して、作用積分が変化しない条件（停留条件）から運動方程式を導く。この章では、まず、変分法の考え方を簡単に説明してから、系の静的なつり合い条件を、変分原理のひとつである仮想仕事の原理で表現する。その後に、それを運動状態にある系に拡張する。

2.1　最小値問題と変分法

一変数関数 $f(x)$ に対して、それが最小値を与える x を求める問題を考える。これを解くには、導関数がゼロ

$$f'(x) = 0 \tag{2.1}$$

を満たす x を求めれば良い。ただし、式 (2.1) の解は、最小値だけでなく最大値や極値、鞍点など、一般に**停留値**を与える x を全て含むことに注意しよう。

別の表現で条件 (2.1) を表そう。そのために、変数 x を少しだけずらして $x + \delta x$ として、関数 f の値がどう変化するか見てみる。δx が微小なら

$$f(x + \delta x) \approx f(x) + f'(x)\delta x + \cdots \tag{2.2}$$

なので、x を δx だけ変化させた時の関数の変化は、δx の一次の近似で

$$f(x + \delta x) - f(x) \approx f'(x)\delta x \equiv \delta f(x) \tag{2.3}$$

となる。最後の等式で定義される δf を f の**変分**という。この記号を用いると、式 (2.1) の条件は f の変分がゼロと同じなので、

> 関数 $f(x)$ が停留値を取る x を求めるには、f の変分がゼロ
>
> $$\delta f(x) = 0 \tag{2.4}$$
>
> となる x を求めればよい

ということになる。

関数の停留値、またはその条件を求める問題を**変分問題**といい、問題を停留値問題（最小値問題）として定式化し直して解く方法を**変分法**という。物理の基本原理が停留値問題として定式化されている場合には、それを**変分原理**と呼ぶ。解析力学ではニュートンの運動方程式を変分原理から導き、それを基礎に理論を体系づける。

2.2 仮想仕事の原理

静的力学のつり合い問題を変分問題と同様の形で定式化するのが**仮想仕事の原理**である。これはつり合い問題の定式化の仕方として理論的に興味深いだけでなく、実用的にも、いわゆる「硬くて滑らかな束縛条件」のある場合には、非常に単純で便利な方法だ。

2.2.1 質点系の釣り合い条件

N 個の質点からなる系を考える。位置 $\boldsymbol{r}_i$ にある i 番目の質点に力 $\boldsymbol{F}_i$ が働いているとする[1]。この質点系のつり合い条件は、仮想仕事の原理を用いて以下のように述べることができる。

（仮想仕事の原理）質点系のつり合い条件は、任意の仮想変位 $\{\delta\boldsymbol{r}_i\}$ に対して、各質点に働いている力 $\{\boldsymbol{F}_i\}$ がする仮想仕事 δW がゼロ、即ち

$$\delta W \equiv \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2.5}$$

となることである。

変位 $\{\delta\boldsymbol{r}_i\}$ は、実際に起こる変位ではなく仮に考えた変位という意味で**仮想変位**と呼ばれる。また、式 (2.5) で定義される δW は、仮想変位 $\{\delta\boldsymbol{r}_i\}$ に対して各質点に働いている力がする仕事なので、**仮想仕事**と呼ばれる [2]。

質点系のつり合い条件は、各質点に働いている力がゼロ

$$\boldsymbol{F}_i = 0; \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.6}$$

であるが、仮想仕事の原理はこれと等価である。即ち、式 (2.6) であれば当然、仮想仕事はゼロであるし、また、その逆、任意の仮想変位に対して式 (2.5) が成り立てば、全ての力がゼロ、即ち式 (2.6) が成り立つ。

問題 2.1 任意のベクトルとの内積がゼロのベクトルはゼロベクトルであること、すなわち、

$$^\forall\boldsymbol{B} \text{ に対して } \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \text{ であれば } \boldsymbol{A} = 0$$

を示せ。〔ヒント〕対偶を示せ。

2.2.2 束縛条件

現実の系は、剛体とみなして良い幾つかの部分からなることがある。剛体とは変形しない物体で、全体として並進あるいは回転運動するが、そ

[1] N 粒子の座標 $\{\boldsymbol{r}_i;\ i = 1, 2, \cdots, N\}$ をひとまとめにしたものを $\{\boldsymbol{r}_i\}$ あるいは単に $\boldsymbol{r}$ と略記する。これは $3N$ 次元の空間の 1 つの点を表し、そのような系の全構成要素の座標からなる空間を**配位空間**と呼ぶことがある。N 粒子の運動 $\{\boldsymbol{r}_i(t)\}$ は配位空間の一本の軌道で表される。

[2] $\{\delta\boldsymbol{r}_i\}$ が微小な変位の時、δW の表式 (2.5) は仕事の一次の近似式であるが、式 (2.5) を仮想仕事 δW の定義式とすれば、仮想変位 $\{\delta\boldsymbol{r}_i\}$ の大きさは何でも良い。

れを構成する質点間の距離は全て不変なものをいう。剛体が運動あるいは変位するとき、構成要素の質点の間には相対距離を不変に保つために力が働く。

また別の例として、レールに沿ったジェットコースターの運動のように、運動がある決まった軌道に制限されるとみなして良いような場合がある。ジェットコースターはレールに沿った運動を強制されるために、レールから力を受ける。

このように、剛体やレールのような系の空間的配置を規定する条件、即ち束縛条件によって決まる応力を**束縛力**という。束縛力を求めるためには、全ての質点に働く力を計算して、系の釣り合い条件を求めなければならないので、簡単でないことが多い。

2.2.3 硬くて滑らかな束縛

理想的なジェットコースターのように、摩擦のない剛体からなる系、即ち、

(i) 各部品の変形は全く許されず、かつ、

(ii) 変形を伴わない部品の運動は完全に滑らかで摩擦がない

場合を考える。すると、束縛条件は質点の座標 $\{\boldsymbol{r}_i\}$ の満たすいくつかの等式

$$f_\ell(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = 0, \qquad \ell = 1, 2, \cdots, m \tag{2.7}$$

で表される[3]。

このような束縛を**硬くて滑らかな束縛**と呼ぶ。この場合には束縛力は仕事をしない。即ち、束縛条件を破るような変位は起こらないし、束縛条件を破らない変位に対しては束縛力は働かない。以下で議論するように、硬くて滑らかな束縛の下では、仮想変位を束縛条件を満たすものに限ることによって、仮想仕事の原理は非常に簡単化される。

2.2.4 硬くて滑らかな束縛の下での仮想変位の原理

硬くて滑らかな束縛条件の下で仮想仕事の原理を定式化する。まず、全く任意な仮想変位 $\{\delta\boldsymbol{r}_i\}$ ではなく、束縛条件を満たすように制限された微小な仮想変位 $\{\delta'\boldsymbol{r}_i\}$ を考える[4]。

[3]例えば、質点 1 と 2 の距離を L に固定する束縛条件は、$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2 - L^2 = 0$ と表される。また、放物線 $y = x^2$ の軌道上に束縛される質点の 2 次元運動の束縛条件は、質点の座標を $\boldsymbol{r} = (x, y)$ として、 $f(x, y) = y - x^2 = 0$ で表される。

[4]以下、束縛条件を満たす範囲で任意な仮想変位を $\delta'\boldsymbol{r}$ と表し、**制限された**仮想変位と呼ぶ。その結果生じる**制限された**仮想仕事も $\delta'W$ のように $'$ を付けて表し、全く任意な仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}$ やそれに対する仮想仕事 δW と区別する。

制限された仮想変位 $\{\delta'\boldsymbol{r}_i\}$ に対して「微小な」という修飾語をつけたのは、以下の議論で、変位 $\{\delta'\boldsymbol{r}_i\}$ が束縛条件を破らない “接線方向” を向いている必要があるため。

1) 釣り合い状態にある場合には、　各質点に働く力がゼロなので式 (2.5) が成り立つ。即ち、任意の仮想変位 $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$ に対する仮想仕事 δW がゼロなので、仮想変位を制限されたもの $\{\delta' \boldsymbol{r}_i\}$ に限ってもゼロのまま、即ち、制限された仮想仕事 $\delta' W$ もやはりゼロである：

$$\delta' W \equiv \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta' \boldsymbol{r}_i = 0. \tag{2.8}$$

次に、質点 i に働く力 $\boldsymbol{F}_i$ を 2 つに分け、束縛力 $\boldsymbol{S}_i$ とそれ以外の力 $\boldsymbol{K}_i$ の和

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{S}_i + \boldsymbol{K}_i \tag{2.9}$$

とする。すると、束縛条件の下での仮想仕事 (2.8) は式

$$\delta' W = \sum_i \big(\boldsymbol{S}_i + \boldsymbol{K}_i\big) \cdot \delta' \boldsymbol{r}_i \tag{2.10}$$

と表される。束縛力は束縛条件を満たす変位に対して仕事をしないとしているので、

$$\sum_i \boldsymbol{S}_i \cdot \delta' \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2.11}$$

であるから、$\delta' W$ は $\{\boldsymbol{K}_i\}$ のみで表される：

$$\delta' W = \sum_i \boldsymbol{K}_i \cdot \delta' \boldsymbol{r}_i = 0. \tag{2.12}$$

即ち、釣り合い状態にある時、

> 制限された仮想変位 $\{\delta' \boldsymbol{r}_i\}$ に対して
> 　　束縛力以外の力がする仮想仕事 $\delta' W$ はゼロ

である。

式 (2.11) の左辺や式 (2.12) の中辺は、ベクトル

$$\boldsymbol{S} \equiv \big(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \cdots, \boldsymbol{S}_N\big) \quad や \quad \boldsymbol{K} \equiv \big(\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \cdots, \boldsymbol{K}_N\big)$$

と

$$\delta' \boldsymbol{r} \equiv \big(\delta' \boldsymbol{r}_1, \delta' \boldsymbol{r}_2, \cdots, \delta' \boldsymbol{r}_N\big)$$

の内積とみなすことができるので、式 (2.11) は

> 束縛力 $\boldsymbol{S}$ は束縛条件を満たす任意の仮想変位 $\delta' \boldsymbol{r}$ と<u>直交している</u>

ことを示しており、式 (2.12) は

> 系が釣り合いにある時、束縛力以外の力 $\boldsymbol{K}$ は束縛条件を満たす任意の仮想変 $\delta' \boldsymbol{r}$ と<u>直交している</u>

ことを示している。仮想変位 $\{\delta' \boldsymbol{r}_i\}$ は束縛条件を満たすものに制限されているので、束縛力以外の力 $\boldsymbol{K}_i$ はゼロとは限らない。

2) 逆に、制限された仮想仕事 $\delta' W$ がゼロの場合には、 即ち束縛条件を満たす任意の $\{\delta' \boldsymbol{r}_i\}$ に対して式 (2.12) が成り立つ場合には、束縛力以外の力 $\{\boldsymbol{K}_i\}$ は $\{\delta' \boldsymbol{r}_i\}$ に直交する成分、つまり束縛条件を破る方向の成分しか持たない。そのためこの力は、硬くて滑らかな束縛力の条件 (2.11) を満たす応力

$$\boldsymbol{S}_i = -\boldsymbol{K}_i$$

によって打ち消すことができる：

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{K}_i + \boldsymbol{S}_i = 0.$$

その結果、すべての質点に働く力がゼロとなり、系は釣り合い状態にあることがわかる。

結局、仮想仕事の原理は以下のように述べられる。

> **（仮想仕事の原理 ′）** 硬くて滑らかな束縛条件の下では、質点系のつり合い条件は、束縛条件を満たす任意の微小な仮想変位 $\{\delta' \boldsymbol{r}_i\}$ に対して、束縛力以外の力 $\{\boldsymbol{K}_i\}$ がする仮想仕事がゼロ、即ち
>
> $$\delta' W = \sum_i \boldsymbol{K}_i \cdot \delta' \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2.13}$$
>
> となることである。

内力が束縛力のみの場合： 系の内力が全て束縛力の場合には[5]、$\{\boldsymbol{K}_i\}$ は外力となり、仮想仕事の原理は、より簡単に

> 束縛条件を満たす任意の微小な仮想変位に対して、
> 外力が仕事をしない時、系はつり合い状態にある

と表される。

束縛力以外の力が保存力の場合： 力 $\{\boldsymbol{K}_i\}$ が保存力の場合には、ポテンシャルを用いて

$$\boldsymbol{K}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$$

と表され[6]、仮想仕事は

$$\delta' W = -\sum_i \delta' \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}_i U = -\delta' U \tag{2.14}$$

となるので、つり合い条件は

> 束縛力以外の力が保存力の場合、束縛条件を満たす任意の仮想変位に対して位置エネルギーの変化がゼロ

となる。

---

[5]複数の剛体の部品が滑らかに繋がれているような場合。

[6]質点 i の座標についてのナブラを $\boldsymbol{\nabla}_i \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial y_i}, \dfrac{\partial}{\partial z_i} \right)$ と表す。

問題 2.2 すでに 問題2.1 で示したように、任意のベクトル $\delta\boldsymbol{r}$ に対して $\boldsymbol{A}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$ であれば $\boldsymbol{A}=0$ である。では、$\delta'\boldsymbol{r}$ が x 軸に平行に制限されている場合には、$\boldsymbol{A}\cdot\delta'\boldsymbol{r}=0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{A}$ はどのようなベクトルか?

問題 2.3 重力の下、滑らかな面上に拘束された質点の釣り合い条件を考える。面が水平から角度 θ 傾いている場合、制限された仮想変位 $\delta'\boldsymbol{r}$, 束縛力 $\boldsymbol{S}$, それ以外の力 $\boldsymbol{K}$ はそれぞれどうなるか（下図 (a)）。更に、仮想仕事の原理 $\delta'W=0$ から、釣り合い条件は面が水平であること $(\theta=0)$ を導け。

問題 2.4 テコの原理を、硬くて滑らかな束縛条件のある場合の仮想仕事の原理 (2.13) を用いて説明せよ（下図 (b)）。

2.3 ダランベールの原理

つり合い条件を仮想仕事の原理で表したのと同じ考え方を用いて、運動方程式を変分原理で表すことができる。

質点 i の軌道を $\boldsymbol{r}_i(t)$ とする。質点に働く力 $\boldsymbol{F}_i$ が、全ての質点の位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と時間 t の関数として $\boldsymbol{F}_i\big(\boldsymbol{r}(t),t\big)$ と表されているとしよう[7]。

（**ダランベールの原理**）質点系の運動の軌道 $\{\boldsymbol{r}_i(t)\}$ は、全ての時刻 t で各質点の任意の仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}_i(t)$ に対して

$$\sum_i\left(\boldsymbol{F}_i\big(\boldsymbol{r}(t),t\big)-m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i(t)}{dt^2}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i(t)=0 \tag{2.15}$$

を満たす。

これまでの議論から直ちに明らかなように、ダランベールの原理はニュートンの運動法則

$$\boldsymbol{F}_i\big(\boldsymbol{r}(t),t\big)-m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i(t)}{dt^2}=0,\quad (i=1,2,3,\cdots) \tag{2.16}$$

と等価である。即ち、運動方程式 (2.16) が成り立てば、当然条件 (2.15) は成り立ち、また逆に、全ての時刻 t で<u>任意の</u>仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}_i(t)$ に対して条件 (2.15) が成り立てば運動方程式 (2.16) が成り立つ。

---

[7]全ての質点の位置を $\boldsymbol{r}\equiv(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N)$ と略記する。

第3章　ハミルトンの原理とラグランジュの運動方程式

力が保存力でポテンシャルによって表される場合には、前章で議論したダランベールの原理はハミルトンの原理と呼ばれる変分問題、すなわち作用積分に対する停留値問題として定式化できる。作用積分を停留にする質点の軌道はオイラー・ラグランジュ方程式を満たす。以降、特に断らない限り、力は保存力でポテンシャルによって与えられるとする。

3.1　ハミルトンの原理

ダランベールの原理から、ニュートンの運動方程式に従う質点系の運動は、以下のような汎関数の変分原理で与えられることが示される。

（ハミルトンの原理）質点系が、時刻 t_1 から t_2 の間に $\{\boldsymbol{r}_{i,1}\}$ から $\{\boldsymbol{r}_{i,2}\}$ へ移動する軌道 $\{\boldsymbol{r}_i(t)\}$ の中で、任意の仮想変位に対して作用積分

$$I\left[\,\boldsymbol{r}\,\right] \equiv \int_{t_1}^{t_2} \Big(T - U\Big)\,dt \tag{3.1}$$

が停留になる軌道が実際に起こる。ただし、T は運動エネルギー、U は位置エネルギーで、それらはそれぞれ質点の速度 $\{\dot{\boldsymbol{r}}_i\}$ と位置 $\{\boldsymbol{r}_i\}$ の関数として与えられる。

被積分関数

$$L\big(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t\big) \equiv T\big(\dot{\boldsymbol{r}}\big) - U\big(\boldsymbol{r}, t\big) \tag{3.2}$$

は、**ラグランジュ関数**あるいは**ラグランジアン**と呼ばれ、積分 $I[\boldsymbol{r}]$ は**作用**あるいは**作用積分**と呼ばれる。作用積分 $I[\boldsymbol{r}]$ は関数 $\boldsymbol{r}(t)$ の関数、即ち**汎関数**である。ハミルトンの原理は汎関数を停留にするという原理なので、変分に対する停留条件、即ち変分原理として表現できる。

（ハミルトンの原理）時刻 $t \in [t_1, t_2]$ で始点と終点が決められた質点系の軌道 $\{\boldsymbol{r}_i(t)\}$ の中で、端点でゼロとなる任意の仮想変位 $\{\delta\boldsymbol{r}_i(t)\}$ に対して、作用積分が停留条件

$$\delta I[\boldsymbol{r}] = \delta\left(\int_{t_1}^{t_2} \Big(T - U\Big)\,dt\right) = 0 \tag{3.3}$$

を満たす軌道が実際に実現する。

端点でゼロの仮想変位

$$\delta \boldsymbol{r}_i(t_1) = \delta \boldsymbol{r}_i(t_2) = 0 \tag{3.4}$$

に対する停留条件は、軌道の始点と終点をそれぞれある値に固定するという条件の下での極小または**鞍点**条件[1] に対応する。

ハミルトンの原理は**最小作用の原理**とも呼ばれる[2]。しかし停留条件を満たす軌道が、いつも作用積分を最小あるいは極小にするというわけではない。一般に、時間間隔 $t_2 - t_1$ が長いと停留条件は鞍点を与える。

3.1.1 ダランベールの原理とハミルトンの原理の等価性

ハミルトンの原理がダランベールの原理と等価であること、即ちニュートンの運動方程式と等価であることは、以下のように示される。

ダランベールの原理からハミルトンの原理： 時刻 t_1 から t_2 までの質点系の軌道 $\{\boldsymbol{r}_i(t)\}$ が、ダランベールの原理を満たしているとする。途中の各時刻 $t \in (t_1, t_2)$ における任意の仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i(t)$ に対して式 (2.15) を満たすので、その時間積分もゼロである：

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i\big(\boldsymbol{r}(t), t\big) - m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i(t)}{dt^2} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i(t) \right] dt = 0. \tag{3.5}$$

力 $\boldsymbol{F}_i$ はポテンシャル U を用いて

$$\boldsymbol{F}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, t) \tag{3.6}$$

と表されるとする[3]。すると、式 (3.5) の左辺第一項は

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i(t)\, dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta \boldsymbol{r}_i(t) \cdot \boldsymbol{\nabla}_i U \, dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \delta U\big(\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \cdots, t\big)\, dt \\
&= -\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} U\big(\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \cdots, t\big)\, dt \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

と表される。ここで δU は、各時刻で質点の位置を $\boldsymbol{r}_i(t)$ から $\boldsymbol{r}_i(t) + \delta \boldsymbol{r}_i(t)$ に変えた時のポテンシャルエネルギー U の変分を表す。

[1] 条件を満たす任意の変分に対して、1 次の変化はゼロで 2 次の変化はいつも正の場合は極小、1 次の変化はゼロで 2 次の変化は正と負の両方がある場合は**鞍点**という。2 次の変化がいつも負の場合は極大であるが、作用積分は極大を取らない。

[2] 歴史的には、作用積分あるいは最小作用の原理は式 (3.1) や (3.3) とは別のものを指していたことに注意。例えば、“力学 II –解析力学–”, 原島鮮（裳華房）, p.31, あるいは、“古典力学”（第 1 版）, ゴールドスタイン（吉岡書店）, p.268 参照。

[3] 位置エネルギー U が時間に陽に依存する場合には、後で示すように力学的エネルギーは保存しないが、以下の議論は成り立つ。

他方、式 (3.5) の左辺第二項は、

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \Big(-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i(t) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i(t) \Big) dt = \Big[-\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i \, dt$$

$$= \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \, dt \right) \equiv \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} T \, dt \right) \quad (3.8)$$

となる。ここで、一行目の右辺第 1 項は仮想変位に対する条件 (3.4) よりゼロとなることを用いた。また、T は系の運動エネルギー

$$T \equiv \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \quad (3.9)$$

を表す。

式 (3.7) と (3.8) より、ダランベールの原理の積分 (3.5) は変分を用いて

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \Big(T\big(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\big) - U\big(\boldsymbol{r}(t), t\big) \Big) \, dt \right) = 0 \quad (3.10)$$

と表される[4]。これは、実際に実現する質点系の軌道 $\{\boldsymbol{r}_i(t)\}$ が作用積分 (3.1) の変分をゼロ、即ち、停留にすることを意味している。作用積分の停留条件は極小または鞍点に対応する[5]。

ハミルトンの原理からダランベールの原理： 逆に、ハミルトンの原理から導かれる軌道がダランベールの原理を満たすことも示される。即ち、上の議論を逆にたどると、任意の仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i(t)$ に対して式 (3.5) が成り立つので運動方程式 (2.16) が導かれ、ダランベールの原理 (2.15) も成り立たなければならない。 ■

問題 3.1 式 (3.8) で $\delta\big(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i\big) = 2m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i$ を用いた。これを示せ。

問題 3.2 関数 $f(t)$ が連続関数とすれば、任意の関数 $\delta x(t)$ に対して $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta x(t) dt = 0$ であれば、$f(t) = 0$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ であることを示せ。もし、$f(t)$ が連続関数でなくても良ければ、必ずしも全ての $t \in [t_1, t_2]$ に対して $f(t) = 0$ とはいえない。例をあげよ。〔ヒント〕対偶を示せ。

3.2 ラググランジュの運動方程式

式 (3.1) で定義される作用積分 I は、質点の軌道 $\boldsymbol{r}(t)$ に対してその値が決まる関数である。質点の軌道 $\boldsymbol{r}(t)$ は時間 t の関数なので、作用積分 I は "関数の関数" である。このような、一つの関数に対して一つの値が決ま

[4] $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots)$ を $\boldsymbol{r}$ と略した。

[5] 作用積分は最大あるいは極大を持たない。というのは、任意の軌道に振幅は微小だが高周波数の振動を重ね合わせることにより、位置エネルギーは殆ど変わらないのに運動エネルギーはより大きな軌道を、元の軌道の近傍に作ることがいつも可能だから。

る関数の関数を**汎関数**という。この節では、作用積分のように積分で与えられる汎関数の極値問題を議論する。

まず、位置 x と速度 $\dot{x}$、時間 t の３つの引数を持つ３変数関数を $L(x,\dot{x},t)$ とし、$t\in[t_1,t_2]$ における質点の軌道 $x(t)$ に対して、積分

$$I[x]=\int_{t_1}^{t_2} L\big(x(t),\dot{x}(t),t\big)dt \tag{3.11}$$

を考える。積分 $I[x]$ は特定の時刻 t での x の値 $x(t)$ ではなく、$t_1\le t\le t_2$ で定義された関数 $x(t)$ に依存しているので、汎関数である[6]。

ここで考える問題は、

> 境界条件
> $$x(t_1)=x_1,\qquad x(t_2)=x_2 \tag{3.12}$$
> の下で汎関数 I を停留にする関数 $x(t)$ は何か？

である。より具体的に述べると、

> $x(t)$ を $x(t)+\delta x(t)$ と変化させたときの I の変化を δI として、
> $\delta x(t)$ に対して一次のオーダーで δI がゼロとなる $x(t)$ は何か?

という問題を考える。ただし、$x(t)$ の変分 $\delta x(t)$ は、$x(t)$ の両端での値が決められた境界条件 (3.12) に対応して、

$$\delta x(t_1)=\delta x(t_2)=0 \tag{3.13}$$

を満たす。

積分 I の変分 δI を $\delta x(t)$ の一次のオーダーで計算する。

$$\begin{aligned}\delta I=I[x+\delta x]-I[x]&=\int_{t_1}^{t_2}\Big[L(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)-L(x,\dot{x},t)\Big]dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\,\delta x(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\delta\dot{x}(t)\right]dt\\
&=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\delta x(t)\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x(t)\,dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x(t)\,dt\end{aligned} \tag{3.14}$$

ここで、２行目から３行目は第２項を部分積分した。３行目の第１項は、境界条件 (3.13) よりゼロである。<u>任意の</u>変分 $\delta x(t)$ に対して $\delta I=0$ となるためには

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \tag{3.15}$$

[6] ある時刻 t だけを見れば、質点の位置 x と速度 v は独立なので、被積分関数 L は３つの独立変数 (x,v,t) の関数である。しかし、$t\in[t_1,t_2]$ での質点の軌道 $x(t)$ が与えられれば、速度 $v(t)$ は軌道の時間微分 $\dot{x}(t)$ で与えられるので、I は関数 $x(t)$ の汎関数であって、２つの関数 $x(t)$ と $v(t)=\dot{x}(t)$ の汎関数では<u>ない</u>ことに注意しよう。

でなければならない。逆に、軌道 $x(t)$ が式 (3.15) を満たせば、式 (3.14) を逆にたどることにより、式 (3.11) で与えられる積分 $I[x]$ が停留になることが分かる。

式 (3.15) を**オイラー・ラグランジュ方程式**という。特に L がラグランジュ関数 (3.2) の場合には**ラグランジュ方程式**とも呼ばれる。

問題 3.3 ラグランジアン L が

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \, \dot{x}^2 - U(x)$$

で与えられるとき、ラグランジュ方程式 (3.15) がニュートンの運動方程式になることを示せ。

問題 3.4 ハミルトンの原理とニュートンの運動方程式が等価であることを示せ。

問題 3.5 A 君は、式 (3.11) で与えられる作用積分 I の変分を計算するのに

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(x, \dot{x}, t) \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right) dt$$

とした。この変形はどこが間違っているか。それはどうして間違いか。
［ヒント］ 式 (3.14) の導出過程を検討せよ。

問題 3.6 問題 3.2 で示したように、連続関数 $f(t)$ が任意の $\delta x(t)$ に対して $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta x(t) dt = 0$ であれば、$f(t) = 0$ である。しかし、$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = 0$ であっても、$f(t) = 0$ ではない。このような例をいくつかあげよ。

第4章　一般化座標と束縛条件

変分原理を用いると、直交座標系以外の座標系や束縛条件がある場合でも、比較的単純な計算で運動方程式を導くことができる。

4.1　一般化座標

運動法則を、$\boldsymbol{r}(t)$ の微分方程式 (1.1) ではなく、作用積分 (3.1) の停留条件 (3.3) で表すことのメリットの一つは、

> オイラー・ラグランジュ方程式 (3.15) は変数のとり方に依存しない

という点である。即ち、時間 t をパラメタとする、直交座標の適当な 3 つの独立な関数で与えられる変数

$$q_1 = f_1(x, y, z; t), \quad q_2 = f_2(x, y, z; t), \quad q_3 = f_3(x, y, z; t) \tag{4.1}$$

を用いて[1] ラグランジアンを

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t) \tag{4.2}$$

と表せれば [2]、ハミルトンの原理 (3.3) は

（ハミルトンの原理）時刻 $t \in [t_1, t_2]$ で始点と終点が決められた質点の軌道の中で実際に起こる軌道 $\{q_i(t)\}$ は、端点でゼロとなる任意の仮想変位 $\{\delta q_i(t)\}$ に対して、作用積分が停留条件

$$\delta I[q] = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L\big(q, \dot{q}, t\big) dt \right) = 0 \tag{4.3}$$

を満たす軌道である。

となり、停留条件 $\delta I = 0$ から得られるラグランジュ方程式は (3.15) と同じ形

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,; \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.4}$$

で与えられる。

[1] 各時刻 t で逆に解けて、$x = g_1(q_1, q_2, q_3; t)$, $y = g_2(q_1, q_2, q_3; t)$, $z = g_3(q_1, q_2, q_3; t)$ とできる関数。

[2] デカルト座標系では運動エネルギー T は座標の時間微分 $\dot{\boldsymbol{r}}$ だけの関数で座標 $\boldsymbol{r}$ に依らなが、一般に、変換した変数で表すと T は q や t にも依存することに注意。

式 (4.1) のような座標間の変換を**点変換**といい、q_i を**一般化座標**という。また、一般化座標に対する力

$$Q_i \equiv -\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{4.5}$$

を**一般化力**と呼ぶ[3]。一般化座標を $\{\delta q_i\}$ 仮想変位させたときの仮想仕事 δW は

$$\delta W = \sum_i Q_i \delta q_i \tag{4.6}$$

で与えられる。

証明：仮想仕事 (2.5) は

$$\delta W = \sum_j \boldsymbol{F}_j \cdot \delta \boldsymbol{r}_j = \sum_i \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

であるが、

$$\sum_j \boldsymbol{F}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} = -\sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \cdot \boldsymbol{\nabla}_j U = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

なので、式 (4.6) を得る。 ■

これまでの議論は、点変換 (4.1) が時間 t に依存しても<u>よい</u>ことに注意しよう。

4.1.1 2次元極座標

一般化座標の簡単な例として、2次元極座標 (r, θ) でラグランジュ方程式がどうなるか見てみよう。2次元直交座標 (x, y) との関係は、

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられるので、その時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

と表される。これらを直交座標で表したラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y)$$

に代入することにより、

$$L = \frac{1}{2}m\Big(\dot{r}^2 + \big(r\dot{\theta}\big)^2\Big) - U(r, \theta)$$

[3] 一般化座標 q_i や一般化力 Q_i は、物理量として必ずしも長さや力の単位で測られる量でないことに注意。

をえる。但し、ポテンシャルを極座標で表したものを $U(r,\theta)$ と書いた。変数 (r,θ) に対するラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \tag{4.7}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \tag{4.8}$$

となる。第 1 式 (4.7) の右辺第 1 項は遠心力を表し、第 2 式 (4.8) の左辺の時間微分される量 $mr^2\dot{\theta}$ は原点周りの角運動量である。

力が中心力の時にはポテンシャルが r のみの関数なので、式 (4.8) の右辺がゼロとなり、

$$mr^2\dot{\theta} = \ell \quad （定数） \tag{4.9}$$

即ち、角運動量保存則を与える。これを用いると式 (4.7) は

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2} + U(r)\right) \tag{4.10}$$

と変形できる。右辺の括弧の中の第 1 項は**遠心力ポテンシャル**と呼ばれている。

問題 4.1 式 (4.8) の左辺の $mr^2\dot{\theta}$ が、原点の回りの角運動量であることを示せ。

問題 4.2 3 次元極座標 (r,θ,ϕ) に対して、ラグランジアンおよびラグランジュ方程式を求めよ。

4.1.2 回転座標系

既に述べたように点変換は時間に依存してもよい。その例として 2 次元回転座標系への変換を考える。

静止した直交座標系を (x,y)、それに対して原点周りに角度 θ だけ傾いた座標系を (X,Y) とする（図 4.1）。座標系 (X,Y) は一定角速度 ω で回転しており、$\theta = \omega t$ とする。それぞれの座標系の基底ベクトル、即ち、x

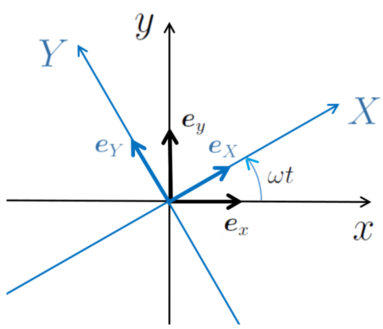

図 4.1: 回転座標系

軸および y 軸方向の単位ベクトルを $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$、$X$ 軸および Y 軸方向の単位ベクトルを $(\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y)$ とする。これらは、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_X \\ \boldsymbol{e}_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -\sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix} \equiv \hat{R}(\theta) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

と関係づけられる。ここで、$\hat{R}(\theta)$ は基底ベクトルの回転を表す直交行列[4]である。

(x, y) と (X, Y) の関係を求める。質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ はそれぞれの座標を用いて

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = X\boldsymbol{e}_X + Y\boldsymbol{e}_Y$$

と表されるので、関係式 (4.11) を用いて $(\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y)$ を $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ で表すことにより、

$$\begin{aligned} x &= X\cos\omega t - Y\sin\omega t \\ y &= X\sin\omega t + Y\cos\omega t \end{aligned} \tag{4.12}$$

をえる。ただし、$\theta = \omega t$ を用いた。これより、運動エネルギー T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) \\ &= \frac{1}{2}m\left[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2\omega\big(-\dot{X}Y + \dot{Y}X\big) + \omega^2\big(X^2 + Y^2\big)\right] \\ &= \frac{1}{2}m\Big[\big(\dot{X} - \omega Y\big)^2 + \big(\dot{Y} + \omega X\big)^2\Big] \end{aligned} \tag{4.13}$$

と表される。この結果を用いて、ラグランジュ方程式を書き下すと

$$m\ddot{X} = \quad 2m\omega\dot{Y} + m\omega^2 X - \frac{\partial U}{\partial X} \tag{4.14}$$

$$m\ddot{Y} = -2m\omega\dot{X} + m\omega^2 Y - \frac{\partial U}{\partial Y} \tag{4.15}$$

をえる。右辺第 1 項は**コリオリ力**、第 2 項は遠心力を表している。

問題 4.3 式 (4.11) で定義される $\hat{R}(\theta)$ が直交行列であること、および $\hat{R}(\theta)^{-1} = \hat{R}(-\theta)$ を確かめよ。また、$\hat{R}(\theta)$ を用いて変換式 (4.12) を求めよ。

問題 4.4 式 (4.13) および式 (4.14)、(4.15) を導出せよ。

問題 4.5 静止座標系で $(x, y) = (a, 0)$ に静止している質点を回転座標系 (X, Y) でみると、原点を中心に右回りに角速度 ω で円運動をしている。この質点が受けている大きさ $ma\omega^2$ の見かけの向心力は、式 (4.14) と (4.15) のどの項から来るのか確認せよ。

4.2 束縛条件

系の一般化座標がすべて独立ではなく、それらの間に何らかの束縛条件があるような場合、ラグランジュ形式による定式化は非常に有用である。束縛条件には大きく分けて、**ホロノミックな束縛条件**と**非ホロノミックな束縛条件**の 2 種類がある。

---

[4] 直交行列とは、転置行列が逆行列、即ち $\hat{R}^t = \hat{R}^{-1}$ となる行列をいう。

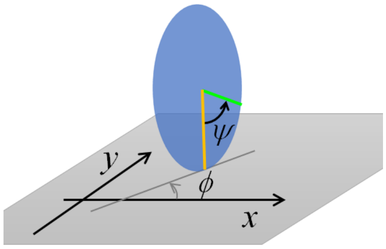

図 4.2: テーブルの上を垂直に滑らずに転がるコイン。コインの面と x 軸の間の角度を ϕ、コインの回転角を ψ とする。

ホロノミックな束縛条件　とは、

$$f_\ell(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) = 0; \qquad \ell = 1, 2, \cdots, m \tag{4.16}$$

のように、一般化座標の間の関数関係で表される束縛条件のことを言う。[5] 例えば、長さ ℓ の糸につるされた振り子の場合、おもりの座標 (x, y) は、

$$x^2 + y^2 = \ell^2 \tag{4.17}$$

の束縛条件を満たさなければならない（図 4.4）。

非ホロノミックな束縛条件　とは、式 (4.16) の形に表せないような束縛条件すべてをいう。例えば、不等式

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) > 0 \tag{4.18}$$

で表される場合や、微分式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(q, t)\, dq_k + a_0(q, t) dt = 0 \tag{4.19}$$

で与えられ、これがある関数の完全微分 $df(q, t)$ で表されない場合などがある[6]。よく見る簡単な例として、平面上を転がる垂直に立ったコインがある。コインの半径を a、コインの面と x 軸の間の角を ϕ、回転角を ψ とすると、平面内の接点の座標 (x, y) とは

$$dx + a\cos\phi\, d\psi = 0, \quad dy + a\sin\phi\, d\psi = 0$$

のように微分の間の関係式がある。しかし、これらの微分式は完全微分で表せないので、座標 (x, y) と角度 (θ, ϕ) の関係は式 (4.16) のような関数では表せない。

4.2.1　ホロノミックな束縛条件の下での運動方程式

座標が何らかの束縛条件を満たさなければならない場合の運動方程式を求めるのは、一般には簡単ではない。仮想変位も束縛条件のもとで取

[5] これは仮想仕事の原理で議論した「硬くて滑らかな束縛」(2.7) に相当するが、式 (4.16) は時間 t に依存してもよいことに注意。

[6] 完全微分で表される時は、式 (4.19) は $f(q, t) = \text{const.}$ となり式 (4.16) の形になる。

らなければならないという制限が加わるので、作用積分の停留条件からオイラー・ラグランジュ方程式を導くことはできない。

しかし、ホロノミックな束縛条件の場合には、容易に運動方程式を導ける[7]。即ち、式 (4.16) の場合のように束縛条件が関数関係で与えられているので、それを用いて変数の数を減らすことができる。つまり、n 個の一般化座標に m 個の束縛条件がある場合には、$n-m$ 個の独立な変数ですべての変数を表せるので、それらを一般化座標とするラグランジアンを求めればよい。独立変数には任意の仮想変位を考えることができ、ラグランジュ方程式 (4.4) が得られる。系に含まれる質点の位置を表すのに必要な独立変数の数を、系の**自由度の数**という。

問題 4.6 振り子の運動は、束縛条件の下での重力中の質点の運動と理解できることを説明せよ。

問題 4.7 鉛直に置かれた円環が、その中心をとおる鉛直軸の回りに角速度 ω で回転している。円環に沿って滑らかに動く質点のラグランジアン L を求め、ラグランジュの運動方程式を導け。

4.3 ラグランジュの未定乗数法—束縛条件付き変分問題の解法

ここでは、束縛条件が積分あるいは微分式で与えられている場合の、変分問題の解法を議論する。これらの場合には、**ラグランジュの未定乗数法**によって、解を求めるための手順が与えられる。

4.3.1 積分条件の場合

まず、未定乗数法の応用例として、条件が積分で与えられている変分問題を考えよう。積分条件は力学の問題ではあまり見られないが、こちらのほうが簡単だ。一般の変分問題では積分条件はしばしば現れる。

次のような問題を考える：

問題：積分

$$J[y] \equiv \int_a^b G(y, y', x)dx = s \tag{4.20}$$

がある与えられた値 s をもつという条件の下に、積分

$$I[y] \equiv \int_a^b L(y, y', x)dx \tag{4.21}$$

を最小（停留）とする関数 $y(x)$ を求めよ。

[7] ホロノミックな束縛条件は、“硬くて滑らか” である。即ち、条件式を破る変位は一切許されないという意味で硬く、また、各時刻で束縛条件を満たす仮想変位に対して束縛力は直交しており仕事をしないという意味で滑らかである。但し、条件式が時間に依存する場合には、束縛力は各時刻での仮想変位に対しては仕事をしないが、系の実際の運動に対しては仕事をすることに注意。

ただし、$y(x)$ は境界条件

$$y(a) = y_a, \qquad y(b) = y_b \tag{4.22}$$

を満たすとする。

停留条件 $\delta I[y] = 0$ を満たす関数 $y(x)$ を求めたいが、条件 (4.20) があるので、その際の変分 $\delta y(x)$ は任意ではない[8]。即ち、$y(x)$ も $y(x) + \delta y(x)$ も条件 (4.20) を満たすもの

$$J[y_s] = s, \qquad J[y_s + \delta y_s] = s \tag{4.23}$$

に限る。この制限された変分を δ' と記すことにすると[9]、

$$\delta' J[y_s] \equiv J[y_s + \delta' y_s] - J[y_s] = 0 \tag{4.24}$$

となる。これを用いると、元の問題は、

(1) 積分条件 (4.20) と

(2) 制限された変分に対する停留条件

$$\delta' I[y_s] = \delta' \left(\int_a^b L(y_s, y_s', x) dx \right) = 0 \tag{4.25}$$

の 2 つの条件を満たす $y_s(x)$ が何か、

と表される。ここで、変分記号 δ' は積分 (4.20) を一定値に保つという条件、即ち式 (4.24) を満たす仮想変位 $\delta' y_s(x)$ に対する変分を表す。

ラグランジュの未定乗数法による解法： この条件付き変分問題は、以下の手順で解くことができる。

1. まず、**未定乗数** λ を導入し、汎関数

$$\tilde{I}[y] \equiv I[y] + \lambda J[y] = \int_a^b \big(L(y, y', x) + \lambda G(y, y', x) \big) dx$$

を考える。

2. この汎関数 $\tilde{I}[y]$ に対して任意の変分 $\delta y(x)$ に対する停留条件

$$\delta \tilde{I}[y] = \delta \left[\int_a^b \big(L(y, y', x) + \lambda G(y, y', x) \big) dx \right] = 0 \tag{4.26}$$

を満たす解 $y(x; \lambda)$ を求める。

[8] この制限とは別に境界条件 (4.22) はいつも満たすとする。

[9] 任意の変分 δ と区別するために、制限された変分を δ' と表す。

3. これは任意の変分に対する停留条件を満たす解なので、被積分関数

$$L(y, y', x) + \lambda G(y, y', x)$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\Big(L(y, y', x) + \lambda G(y, y', x)\Big) = 0 \tag{4.27}$$

を解けばよい。式 (4.27) は未定乗数 λ を含むので、解は λ に依存する。

4. 最後に、この解 $y(x;\lambda)$ を式 (4.20) の被積分関数に入れて、積分の値が s になるように λ を決める。その値を λ_s とすると、積分条件付き変分問題の解 $y_s(x)$ は

$$y_s(x) = y\big(x;\lambda_s\big) \tag{4.28}$$

で与えられる。

これが解になっていることの証明：　上の手順で求めた解 (4.28) が、(1) 積分条件 (4.20) と (2) 制限された変分に対する停留条件 (4.25) の、両方を満たしていることを示せばよい。(1) の積分条件 (4.20) については、そのように λ_s を決めたのだから当然満たされている。以下では、(2) の制限された停留条件 (4.25) が満たされていることを示す。

$y_s(x) = y\big(x;\lambda_s\big)$ は任意の変分 $\delta y_s(x)$ に対して停留条件 (4.26) を満たすので、当然、制限された変分 $\delta' y_s(x)$ に対してもは停留である：

$$\delta\tilde{I}[y_s] = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta'\tilde{I}[y_s] = 0. \tag{4.29}$$

一方、制限された変分 $\delta' y_s(x)$ は式 (4.24) を満たすので、

$$\delta' J[y_s] = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta'\tilde{I}[y_s] = \delta' I[y_s] \tag{4.30}$$

となり、これら 2 つの式 (4.29) と式 (4.30) より、$y(x;\lambda_s)$ は制限された停留条件 (4.25) を満たす。　証明終 ■

問題 4.8 複数の積分条件

$$J_\ell[y] \equiv \int_a^b G_\ell(y, y', x)dx = s_\ell\,; \qquad \ell = 1, 2, \cdots, m$$

が課されている場合には、この節の議論はどのように拡張されるか？

例題：懸垂曲線

積分条件の下での変分問題の典型的な例題として、重力の下で両端を固定した時の糸の形（懸垂曲線）を求める問題である。糸の形は糸の重力の位置エネルギーが最小になるように決まっているが、糸の全長は一定という束縛条件がある。

両端の座標を $(\pm a, 0)$、糸の全長を ℓ とする。糸の形が関数 $y = y(x)$ で表されるとき、$y(x)$ は境界条件

$$0 = y(\pm a) \tag{4.31}$$

を満たす。また、糸の長さは $y(x)$ の汎関数として

$$L[y] \equiv \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^{\,2}}\, dx = \ell \tag{4.32}$$

と表され、糸の重力の位置エネルギーは

$$U[y] = \int_{-a}^{a} g\, y\, \rho \sqrt{1 + y'^{\,2}}\, dx \tag{4.33}$$

で与えられる。但し、糸の線密度を ρ、重力の加速度を g とした。

問題は、境界条件 (4.31) と糸の長さ ℓ が与えられたとき、

> 積分条件 (4.32) の下で、式 (4.33) で与えられる U を最小にする関数 $y(x)$ は何か、

ということである。これを変分問題として述べると、

> $y(x)$ および $y(x) + \delta' y(x)$ がともに積分条件 (4.32) を満たす制限された変分 $\delta' y$ に対して、汎関数 $U[y]$ が停留条件 $\delta' U = 0$ を満たす $y(x)$ は何か、

となる。

この変分問題はラグランジュの未定乗数法を用いて解ける。即ち、未定乗数を λ として、$I[y] \equiv U[y] + g\rho\lambda\, L[y]$ が任意の変分 δy に対して停留となる $y(x; \lambda)$ を求めた後、$y(x; \lambda)$ が積分条件 (4.32) を満たすように、λ を決めればよい[10]。

汎関数 $J[y]$ の停留条件は任意の変分 $\delta y(x)$ に対してなので、オイラー・ラグランジュ方程式 (4.27)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1 + y'^{\,2}}}\right) - \sqrt{1 + y'^{\,2}} = 0 \tag{4.34}$$

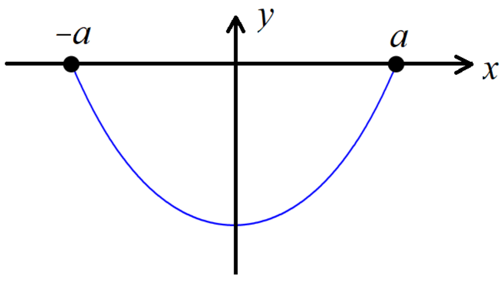

図 4.3: 懸垂曲線

[10]$g\rho$ を共通因子として除くため λ に $g\rho$ をかけた。

で与えられる。これを解くには若干、技術が必要であるが、一般解は

$$y(x;\lambda) = C\cosh\frac{x+D}{C} - \lambda \tag{4.35}$$

となる[11]。ここで C および D は積分定数。つまり、懸垂曲線は双曲線関数 cosh となることが分かる。

積分定数 C, D および未定乗数 λ は、境界条件と束縛条件から求められる。即ち、境界条件 (4.31) から、

$$D = 0, \qquad 0 = C\cosh\frac{a}{C} - \lambda$$

が得られ、束縛条件 (4.32) から

$$\ell = 2C\sinh\frac{a}{C}$$

が得られる。これらの関係式から積分定数 C と未定乗数 λ が、a, ℓ の関数として決まる。

問題 4.9 式 (4.35) がオイラー・ラグランジュ方程式 (4.34) の解になっていることを示せ。

4.3.2 微分条件の場合

既に議論したように、力学の問題では非ホロノミック条件が式 (4.19) のような微分式

$$\sum_k a_k(q,t)dq_k + a_0(q,t)dt = 0 \tag{4.36}$$

で表される場合がある。この微分式は、運動の軌道 $q_k(t)$ に対して速度 $\dot{q}_k(t) = dq_k/dt$ が満たさなければならない条件

$$\sum_k a_k(q,t)\dot{q}_k(t) + a_0(q,t) = 0 \tag{4.37}$$

を与える。

ホロノミック条件の場合には、$q_k(t)$ が満たすべき条件は、

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) = 0 \tag{4.38}$$

と与えられるが、この全微分を取ると

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}dq_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial q_n}dq_n + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 \tag{4.39}$$

となる。これを

$$\frac{\partial f(q,t)}{\partial q_k} = a_k(q,t), \quad \frac{\partial f(q,t)}{\partial t} = a_0(q,t)$$

[11] 例えば、「力学 II」（原島鮮著、裳華房）p.18 参照。

とすると、ホロノミック条件 (4.38) も微分式 (4.36) の形に表せる。

このように束縛条件が微分式 (4.36) で与えられている場合にも、ラグランジュの未定乗数法により、変分問題を解くための処方箋を与えることができる。この場合、未定乗数は**束縛力**と関係している。

ここで考えている問題は、

> 微分式で表される束縛条件 (4.36) の下で、系の運動方程式はどのように表されるか

である。これをハミルトンの原理を用いて定式化すると、以下のような変分問題になる。

微分条件で制限された変分： まず、微分条件 (4.36) によって制限された変分 $\delta' q_k(t)$ は、どう取るべきだろうか？第 2.3 節のダランベールの原理における議論に従うと、ハミルトンの原理の仮想変位は各時刻で独立に取らなければならない。即ち、仮想変位に対する制限も各時刻で与えなければならないので、制限された仮想変位 $\delta' q_k(t)$ の満たすべき関係式は、微分式 (4.36) において $dt = 0$ として、更に $dq_k \to \delta' q_k(t)$ と置き換えた式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(q,t)\,\delta' q_k(t) = 0 \tag{4.40}$$

によって与えられる。

微分条件で制限されたハミルトンの原理： これまでの議論から、微分条件 (4.36) で制限されたハミルトンの原理は、関係式 (4.40) によって制限された変分に対する停留条件

$$\delta'\left(\int_{t_1}^{t_2} L\,dt\right) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \delta' q_k(t)\,dt = 0 \tag{4.41}$$

として与えられる。即ち、問題は

> 2 つの条件
>
> (1) 束縛条件 (4.37)、或いはホロノミック条件の場合には (4.38)
>
> (2) 関係式 (4.40) で制限された変分 $\delta' q_k(t)$ に対する停留条件
>
> $$\delta' I[q] = \delta'\left(\int_{t_1}^{t_2} L\,dt\right) = 0 \tag{4.42}$$
>
> を満たす軌道 $q(t)$ をどうやって求めるか？

となる。

仮想変位 $\delta' q_k(t)$ がすべて独立で任意で<u>あれば</u>、式 (4.41) の係数は全てゼロでなければならず、ラグランジュの方程式 (3.15) が導かれる。しかし、$\delta' q_k(t)$ は任意ではなく関係式 (4.40) を満たさなければならないので、その係数はゼロとは言えない。

ラグランジュの未定乗数法による解法： 微分条件つき変分問題は、以下の手順で解ける。

1. まず、束縛条件 (4.40) に対して未定乗数 $\lambda(t)$ を導入し、制限のない任意の仮想変位 $\delta q_k(t)$ に対する変分問題

$$\delta\tilde{I}[q] \equiv \delta I[q] + \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(q,t)\delta q_k(t) \right) dt = 0 \tag{4.43}$$

を考える。ここで、束縛条件 (4.40) は各時刻 t で与えられているので、未定乗数も各時刻に対して与える。すなわち、未定乗数は時間をパラメタとして持つ、いわば "未定関数" $\lambda(t)$ となることに注意。

2. 右辺第一項に式 (3.14) の変形を用いると、この停留条件は

$$\delta\tilde{I}[q] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda(t)a_k(q,t) \right) \delta q_k(t)\, dt = 0 \tag{4.44}$$

となる。変分 $\delta q_k(t)$ はすべて独立で任意なので、$q_k(t)$ に対する方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda(t)a_k(q,t) = 0\,; \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{4.45}$$

が得られる。

3. この方程式が、任意の t の関数 $\lambda(t)$ に対して解けたとする。その解 $q_k(t;\lambda)$ は t の関数としての未定乗数 $\lambda(t)$ に依存する。

4. 解 $q_k(t;\lambda)$ を束縛条件 (4.37) または (4.38) に代入すると、$\lambda(t)$ に対する方程式を得る。これらを解いて求めた $\lambda_s(t)$ を解 $q_k(t;\lambda)$ に代入したもの $\{q_k(t;\lambda_s)\} \equiv q_s(t)$ が、求める解である。

問題 4.10 式 (4.43) から式 (4.44) を導け。

これが解になっていることの証明： 積分条件の場合と同様に示すことができる。まず、$q_s(t)$ は束縛条件を満たす。次に、上の手順で得た解 $q_s(t)$ は、任意の変分 $\delta q_k(t)$ に対して停留条件 (4.43) を満たすので、変分 δ を制限された変分 δ' にしても停留条件

$$\delta'\tilde{I}[q_s] = \delta' I[q_s] + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_s(t) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(q_s,t)\delta' q_k(t) \right) dt = 0 \tag{4.46}$$

は満たされる。更に、制限された変分 $\delta' q_k(t)$ は、式 (4.40) を満たすので、式 (4.46) の第 2 項はゼロとなる。故に、$q_s(t) = \{q_k(t;\lambda_s)\}$ は制限された停留条件 (4.42) を満たす。

証明終 ■

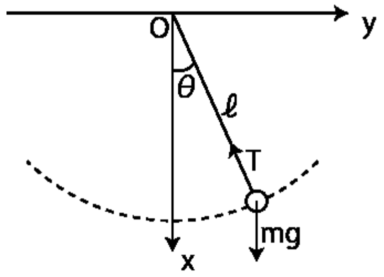

図 4.4: 単振り子

束縛力：　式 (4.45) を

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \lambda(t) a_k(q,t); \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{4.47}$$

と書くと、右辺の

$$\lambda(t) a_k(q,t) \equiv Q_k; \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{4.48}$$

は、束縛条件を満たすために自由度 q_k に働く力と解釈できる。このような力を**束縛力**という。

問題 4.11 微分式で与えられる束縛条件 (4.36) が m 個あって

$$\sum_k a_{\ell k}(q,t) dq_k + a_\ell(q,t) dt = 0; \quad \ell = 1, 2, \cdots, m$$

で与えられている場合、この節のそれぞれの式はどう拡張されるか？

問題 4.12 ラグランジュの未定乗数法は統計力学でも用いられる。そこでの議論と比較せよ。（参考「統計力学 I　講義ノート」第 6.3.1 節）

4.4　例題

4.4.1　単振り子

簡単な例題として、長さ ℓ の単振り子を考える。簡単に運動を記述するには、振り子の振れ角 θ を一般化座標としてラグランジュ関数 L を表して、オイラー・ラグランジュ方程式を書けばよい。

しかし、ここではラグランジュの未定乗数の例題として、直交座標系を用いてラグランジュ関数を記述し、糸の長さが一定という束縛条件に対して、未定乗数を使って運動方程式を導いてみる。そうすることによって、未定乗数が束縛力としての糸の張力になっていることを確かめる。

図 4.4 のように直交座標系 (x, y) をとると、ラグランジュ関数は

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx \tag{4.49}$$

となり、ハミルトンの原理は、作用積分の停留条件で、

$$\delta' I[x,y] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta' x_i(t) \right] dt = 0 \tag{4.50}$$

と表される。ここで $x_1 = x$, $x_2 = y$ とした。いま、糸の長さが ℓ で一定という束縛条件

$$x^2 + y^2 = \ell^2 \tag{4.51}$$

のために、仮想変位 $\delta' x_i(t)$ は

$$x(t)\delta' x(t) + y(t)\delta' y(t) = 0 \tag{4.52}$$

を満たさなければならないため、x, y に対するオイラー・ラグランジュ方程式は成り立たない。

ラグランジュの未定乗数法の手順に従えば、未定乗数 $\lambda(t)$ を導入して任意の仮想変位 $\delta x_i(t)$ に対して変分問題

$$\delta \tilde{I}[x,y] \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \lambda(t) x_i \right) \delta x_i(t) \right] dt = 0 \tag{4.53}$$

を考える。それを解いた後で束縛条件 (4.51) を満たすように $\lambda(t)$ を決めればよい。

式 (4.53) より、解くべき運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \lambda(t) x_i = 0; \qquad i = 1, 2$$

と表される。これらにラグランジュ関数 (4.49) を代入して、

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg + \lambda(t) x \\ m\ddot{y} &= \lambda(t) y \end{aligned}$$

を得る。この方程式を任意の t の関数 $\lambda(t)$ に対して解くのは難しいが、$\lambda(t)$ が束縛力を表すことは、以下のようにして分かる。

右辺に $x = \ell\cos\theta$, $y = \ell\sin\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg + \lambda(t)\,\ell\cos\theta \\ m\ddot{y} &= \lambda(t)\,\ell\sin\theta \end{aligned}$$

となる。これより未定乗数 λ は糸の張力 T と

$$T(t) = -\lambda(t)\ell$$

のように関係していることが分かる。

問題 4.13 束縛条件 (4.51) より、仮想変位 $\delta' x$ および $\delta' y$ に対する条件式 (4.52) を導け。

4.4.2　床を転がるコイン

非ホロノミック束縛条件の下での運動の例として、第 1.6.2 節でも取り上げた床を転がるコインの運動を考えよう[12]。第 4.2 節の場合より一般化してコインが鉛直から傾いている場合も含めよう。その場合、重心は鉛直方向にも運動するので、三次元の運動を考えなければならない。

運動を記述するために、以下の 2 つの座標系を考える（図 4.5）：

座標系 xyz： $x-z$ 平面を床面、y 軸を鉛直上向きとする空間に固定された座標系。

座標系 XYZ： コインの中心を原点とし、水平方向に X 軸、y 軸をコイン面に射影した方向に Y 軸、コイン面に垂直な方向を Z 軸とする座標系。

また、コインの向きは 3 つの角度 (θ, ϕ, ψ) で記述される：

θ： y 軸に対して Y 軸の X 軸まわりの回転角。

ϕ： x 軸に対して X 軸の y 軸まわりの回転角。

ψ： Z 軸まわりのコインの回転角。

すると、xyz 系の基底ベクトル $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ と、XYZ 系の基底ベクトル $(\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y, \boldsymbol{e}_Z)$ との関係は、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_X \\ \boldsymbol{e}_Y \\ \boldsymbol{e}_Z \end{pmatrix} = \hat{R}(\theta,\phi) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \hat{R}^t(\theta,\phi) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_X \\ \boldsymbol{e}_Y \\ \boldsymbol{e}_Z \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

で与えられる。ここで、$\hat{R}(\theta,\phi)$ および $\hat{R}^t(\theta,\phi)$ は直交行列およびその転置行列で

$$\hat{R}(\theta,\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\phi, & 0, & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi, & \cos\theta, & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi, & -\sin\theta, & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

$$\hat{R}^t(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi, & \sin\theta\sin\phi, & \cos\theta\sin\phi \\ 0, & \cos\theta, & -\sin\theta \\ -\sin\phi, & \sin\theta\cos\phi, & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} = \hat{R}^{-1}(\theta,\phi) \tag{4.56}$$

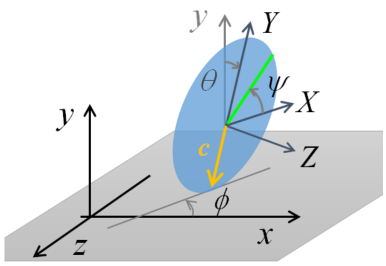

図 4.5: 床を転がるコイン

[12] この転がるコインの運動方程式を数値的に解くウェブシミュレータを
http://hnakanishi.cloudfree.jp/ThreeJS/Rolling_Coin/Rolling_Coin.html
に置いておく。

で与えられる。

ラグランジュ関数 L を記述する一般化座標として、コインの重心の位置座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と向きを表す角度 (θ, ϕ, ψ) をとる。すると、角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ は (θ, ϕ, ψ) の時間微分を用いて、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_X + \dot{\phi}\boldsymbol{e}_y + \dot{\psi}\boldsymbol{e}_Z \\ &= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_X + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_Y + \big(\dot{\psi} - \dot{\phi}\sin\theta\big)\boldsymbol{e}_Z \end{aligned} \tag{4.57}$$

と表され、これらを用いて、ラグランジュ関数 L は

$$\begin{aligned} L =& \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t\hat{I}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{r}}^2 - Mgy \\ =& \frac{1}{2}I_X\omega_X^2 + \frac{1}{2}I_Y\omega_Y^2 + \frac{1}{2}I_Z\omega_Z^2 + \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{r}}^2 - Mgy \end{aligned} \tag{4.58}$$

と与えられる。ここで、$I_X = I_Y = \frac{1}{4}Ma^2$, $I_Z = \frac{1}{2}Ma^2$ である。

滑りなし条件は

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}\,; \quad \boldsymbol{c} = -a\boldsymbol{e}_Y \tag{4.59}$$

で与えられるが、これは非ホロノミック条件である。これによって課される仮想変位に対する条件 (4.40) は、

$$\boldsymbol{\delta'r} + \sum_{\alpha=(\theta,\phi,\psi)} \delta'\alpha\frac{\partial}{\partial\dot{\alpha}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c} = 0 \tag{4.60}$$

となる。これはベクトル式なので、ラグランジュの未定定数は各成分に対して導入しなければならない。それらを $\big(R_x(t), R_y(t), R_z(t)\big) \equiv \boldsymbol{R}(t)$ とすると、式 (4.43) に対応する変分問題は

$$\begin{aligned}\delta\tilde{I}\,[\,\boldsymbol{r}, \theta, \phi, \psi\,] &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta L + \boldsymbol{R}(t)\cdot\left(\boldsymbol{\delta r} + \sum_{\alpha=(\theta,\phi,\psi)}\delta\alpha\frac{\partial}{\partial\dot{\alpha}}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c}\right)\right)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta L + \boldsymbol{R}(t)\cdot\boldsymbol{\delta r} + \sum_{\alpha=(\theta,\phi,\psi)}\big(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{R}(t)\big)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{\alpha}}\,\delta\alpha\right)dt = 0\end{aligned}$$

となり、式 (4.45) に対応するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}} - \frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}(t) \tag{4.61}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = \big(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{R}(t)\big)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{\alpha}}\,; \quad \alpha = \theta, \phi, \psi \tag{4.62}$$

となる。これらは、第 1.6.2 節における運動方程式 (1.67) および (1.68) と等価である（付録 B 参照）。

第5章　対称性と保存則

ニュートン力学では、エネルギー保存則は保存力場、運動量保存則は作用反作用の法則、角運動量保存則は中心力と、それぞれ別の論理で導かれる。しかし、解析力学の定式化によると、これらの保存則は系の持つ対称性と密接に関係があることが分かる。それを最も一般的に表現したのがネーターの定理である。

5.1　循環座標と対称性、運動量保存則

ラグランジュ方程式は、ラグランジアン $L \equiv T - U$ を用いて

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{5.1}$$

と書ける。ここで 一般化座標 q_i に対して、それに**正準共役な運動量** p_i を

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{5.2}$$

と定義する。すると式 (5.1) は

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{5.3}$$

と表される。

ラグランジアン L に含まれない座標を**循環座標**あるいは**サイクリック座標**という。q_i が循環座標であれば $\partial L/\partial q_i = 0$ なので、式 (5.3) より、

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \qquad \therefore \quad p_i = \text{const.} \tag{5.4}$$

となる。即ち、

循環座標に正準共役な運動量は保存する

座標系	ラグランジアン	座標	運動量	
1次元座標	$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$	x	$p_x = m\dot{x}$	並進運動量
2次元極座標	$L = \frac{1}{2}m\Big(\dot{r}^2 + \big(r\dot{\theta}\big)^2\Big) - U(r,\theta)$	r	$p_r = m\dot{r}$	動径方向の運動量
		θ	$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$	角運動量

表 5.1: 一般化座標とそれに正準共役な運動量

ということが分かる。

座標 q_i が循環座標、即ち、ラグランジアン L に含まれないということは、その座標の値を変化させるような操作を系に加えても、ラグランジアン、即ち、系の力学的性質が何も変わらないということである。ある操作を加えても系が不変であることを、系がその操作に対して**対称**であるという[1]。座標 q_i が循環座標の時、q_i に任意の実数 α を加えて

$$q_i \quad \to \quad q_i + \alpha \tag{5.5}$$

と置き換えてもラグランジアンが不変である。このような場合には、系は**連続対称性**を持っているという[2]。

座標 q_i が循環座標であれば、系は q_i のずらし (5.5) に対して連続対称性を持っており、q_i に共役な運動量 p_i が保存する。例えば、座標 x が循環座標であれば、系は x 方向に**並進対称性**を持っており、x 方向の並進運動量 p_x が保存する。極座標に於いてある軸の回りの角度が循環座標であれば、系はその角度を測る軸の回りの**回転対称性**を持っており、角度に正準共役な運動量、即ち、角運動量が保存する。

問題 5.1 直交座標系の座標 x に正準共役な運動量 p_x が通常の運動量であることを示せ。また、2 次元極座標の θ、および 3 次元極座標の方位角 ϕ に正準共役な運動量は角運動量の z 成分であることを示せ。

5.2 時間並進対称性とエネルギー保存則

ラグランジアンが座標 $q(t)$ およびその時間微分 $\dot{q}(t)$ を通じてのみ時間 t に依存する場合、ラグランジアンは時間に陽に依存しないという[3]。この時、式 (5.5) と同様に、任意の実数 α だけ時間をずらして

$$t \quad \to \quad t + \alpha \tag{5.6}$$

と置き換えてもラグランジアンは不変で、系は**時間並進対称性**を持つ。

系が時間並進対称性を持つとき、

$$H \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{5.7}$$

で与えられる H の値は保存する[4]：

$$\frac{dH}{dt} = 0. \tag{5.8}$$

[1]例えば、左右を入れ替えても形が変わらないことを "左右対称"（あるいは "鏡映対称"）というが、それを一般化した概念。

[2]それに対して、左右対称のように系を不変にする変換が連続パラメタを含まない場合には**離散対称性**という。

[3]「陽に」は、「ように」或いは「あらわに」と読む。

[4]正準運動量 p の定義式 (5.2) を用いて、$\dot{q}$ を q と p の関数として表して、式 (5.7) から $\dot{q}$ を消去したものを、ハミルトン関数あるいはハミルトニアンという。第 7 章参照。

証明：L が t に陽に依存しないので、$\partial L/\partial t = 0$ だから、

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \sum_i \left(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \left(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) \\ &= \sum_i \left(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i - \dot{p}_i\dot{q}_i - p_i\ddot{q}_i\right) = 0 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

式 (5.7) で与えられる H は、ポテンシャル U が $\dot{q}_i$ に依存せず、運動エネルギー T が $\dot{q}_i$ の **2 次形式**（２次の同次多項式）の場合には、

$$H = T + U \tag{5.9}$$

となり、力学的エネルギーに一致する。

証明：T が $\dot{q}_i$ の 2 次形式なので、対称行列 a_{ij} を用いて

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\,\dot{q}_i\dot{q}_j\,; \qquad a_{ij} = a_{ji} \tag{5.10}$$

と表すことができる。ここで、a_{ij} は q に依存してもよい。ポテンシャル U は $\dot{q}_i$ に依存しないので、運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\big(T - U\big) = \sum_j a_{ij}\dot{q}_j \tag{5.11}$$

となり、

$$\sum_i p_i\dot{q}_i = \sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = 2T$$

なので、式 (5.7) より

$$H = 2T - (T - U) = T + U.$$

証明終 ■

直角座標系で表すと、運動エネルギー $T = \dfrac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ は速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ の 2 次形式で、また、ポテンシャルエネルギー $U(\boldsymbol{r})$ は位置のみの関数なので、

時間並進対称性から力学的エネルギー保存則が導かれる

ことがわかる。

問題 5.2 2 次の同次多項式 $f(x) \equiv 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ を、$f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ と表したときの、対称行列 a_{ij} を求めよ。

問題 5.3 式 (5.10) の a_{ij} が対称行列でない場合には、a_{ij} から対称行列 a'_{ij} を構成して、それで $T = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{ij} a'_{ij}\,\dot{q}_i\dot{q}_j$ と表せることを示せ。即ち、２次形式はいつも対称行列を用いて表せる。

問題 5.4 式 (5.11) の右辺に 1/2 がないのはなぜか説明せよ。

問題 5.5 ラグランジアンが $L=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2-U(x)$ で与えられるとき、式 (5.7) で定義される H は力学的エネルギーになることを示せ。

問題 5.6 ラグランジュ関数 L が時間を含まなければ、式 (5.2) より当然 p_i も時間を含まず、式 (5.7) で定義される H は時間を含まない。これから A 君は「H が時間に依存しないのは、計算するまでもなく当たり前」と考えた。この議論はどこが不十分か？

問題 5.7 ラグランジュ関数 L が t に陽に依存するときには

$$\frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

となることを示せ。（左辺は全微分、右辺は偏微分であることに注意。）

5.3 ネーターの定理

対称性と保存量との関係を一般的に議論したのがネーターの定理である。ネーターの定理は場の理論においては威力を発揮するが、この講義で扱っている質点系に対してはあまり御利益は感じられない。とは言うものの、場の理論はこの講義ではしないので、ここではその雰囲気を味わうために、質点系でのネーターの定理を示しておこう。

定理 5.1 (質点系におけるネーターの定理) 座標 q_i を

$$q_i \quad \to \quad \bar{q}_i(q,\alpha) \tag{5.12}$$

と置き換えたとき、ラグランジアン L が α に依存しなければ、

$$R=\sum_i p_i\,\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \tag{5.13}$$

は保存量である。ただし、p_i は座標 q_i に正準共役な運動量、$\bar{q}_i(q,\alpha)$ は座標 $\{q_i\}$ と連続パラメタ α の関数で、$\alpha=0$ で q_i に一致するとする：

$$\bar{q}_i(q,\alpha)\Big|_{\alpha=0}=q_i. \tag{5.14}$$

証明：ラグランジアン L は α によらないので、

$$\frac{d}{d\alpha}\Big(L\big(\bar{q}_i(q,\alpha),\,\dot{\bar{q}}_i(q,\alpha),\,t\big)\Big)=0$$

である。即ち、

$$\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_i}\,\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_i}\,\frac{\partial \dot{\bar{q}}_i}{\partial \alpha}\right)=0$$

となる。一方、

$$\frac{\partial \dot{\bar{q}}_i}{\partial \alpha}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\,\frac{d}{dt}\bar{q}_i(q,\alpha)=\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \bar{q}_i(q,\alpha)}{\partial \alpha}$$

なので、

$$\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \alpha} \right) = 0$$

となる。ここで、$\alpha \to 0$ の極限を取る。第 1 項の第 1 因子は、ラグランジュ方程式を用いると

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_i} \to \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (\alpha \to 0)$$

なので、これと用いると、

$$\sum_i \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \right) \right] = 0$$

となる。これより

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \right) = 0$$

を得る。 ■

時間並進対称性に対しては、以下のような形の定理が成り立つ。

定理 5.2 (時間並進対称性に対するネーターの定理) 作用積分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{5.15}$$

が、任意の t_1 および t_2 に対して、時間のずらし、即ち、

$$\begin{aligned} t_i \quad &\to \quad \bar{t}_i \equiv t_i + \alpha \\ q_i(t) \quad &\to \quad \bar{q}_i(\bar{t}) \equiv q_i(t) = q_i(\bar{t} - \alpha) \end{aligned}$$

の置き換えに対して不変であれば、

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

で定義される H は保存量である。

証明： 作用積分が、上に与えた時間のずらしの置き換えに対して不変なので、

$$\begin{aligned} I &= \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} L\big(\bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t}), \bar{t}\big)\, d\bar{t} \\ &= \int_{t_1+\alpha}^{t_2+\alpha} L\big(q(\bar{t}-\alpha), \dot{q}(\bar{t}-\alpha), \bar{t}\big)\, d\bar{t} \\ &= \int_{t_1+\alpha}^{t_2+\alpha} L\big(q(t-\alpha), \dot{q}(t-\alpha), t\big)\, dt \end{aligned}$$

は α に依存しない。最後の等号では積分変数を $\bar{t}$ から t へ書き換えた。

積分 I が α に依らないので $\dfrac{dI}{d\alpha}=0$、これに $\alpha=0$ を代入して

$$\begin{aligned}
0 =& \left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = L\big(q_2,\dot{q}_2,t_2\big) - L\big(q_1,\dot{q}_1,t_1\big) \\
&\qquad\qquad - \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2}\frac{dL}{dt}dt - \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}\right]dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i\right]dt
\end{aligned}$$

を得る。積分の範囲 t_1 と t_2 は任意なので被積分関数はゼロでなければならないので、結局

$$L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i = -H$$

は保存することが分かる。 ■

問題 5.8 ネーターの定理の結果 (5.13) 用いて、循環座標に正準共役な運動量が保存することを説明せよ。

問題 5.9 ラグランジアンが

$$L=\frac{1}{2}m\big(\dot{x}+\dot{y}\big)-U\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

で与えられる、2 次元中心力場中の質点の運動を考える。

1. 質点の座標 (x,y) を左回りに角度 α 回転させた座標 $\big(\bar{x}(\alpha),\bar{y}(\alpha)\big)$ は

$$\begin{aligned}
\bar{x}(\alpha) &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\
\bar{y}(\alpha) &= x\sin\alpha + y\cos\alpha
\end{aligned}\tag{5.16}$$

で与えられることを示せ。この関係式は $\alpha=0$ のとき $(\bar{x},\bar{y})=(x,y)$ となる。

2. ラグランジアンの変数を (x,y) から $\big(\bar{x}(\alpha),\bar{y}(\alpha)\big)$ で置き換えて (x,y) で表しても、元と同じ形で α によらないことを示せ。

3. この置き換えに対して式 (5.13) で与えられる保存量 R を求めよ。この R はどのような物理量か？

第6章　微小振動

この章では、安定な平衡点の周りの微小振動を議論する。解析力学の形式的な定式化を議論するほかの章とは違い、微小振動という具体的な運動について、その扱いを一般的に議論する。

6.1　一自由度の微小振動

一般化座標 q で記述される一自由度系を考える。安定な平衡点を $q = q_0$ とすると、そこではポテンシャルエネルギー$U(q)$ が極小値を取るので、

$$\left.\frac{dU(q)}{dq}\right|_{q=q_0} = 0, \qquad \left.\frac{d^2U(q)}{dq^2}\right|_{q=q_0} > 0$$

である。平衡点周りでポテンシャルを展開すると

$$\begin{aligned} U(q) &= U(q_0) + \left.\frac{dU}{dq}\right|_{q_0}(q-q_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0}(q-q_0)^2 + \cdots \\ &\approx \frac{1}{2}kx^2 + \text{const.} \end{aligned} \tag{6.1}$$

と書ける。但し、

$$k \equiv \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0} > 0 \tag{6.2}$$

$$x \equiv q - q_0 \tag{6.3}$$

とした。一方、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 \approx \frac{1}{2}a(q_0)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{6.4}$$

と近似できる。但し、

$$m \equiv a(q_0) > 0$$

とした。$\dot{x} \neq 0$ で運動エネルギーはいつも正なので、$m > 0$ である。

結局、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \tag{6.5}$$

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{或いは、} \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x \tag{6.6}$$

と与えられる。但し、

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{6.7}$$

これは調和振動子の方程式で、式 (6.6) の一般解は

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \\ &= C\cos\big(\omega_0 t + \delta\big) \\ &= \mathrm{Re}\left[De^{i\omega_0 t}\right] \end{aligned} \tag{6.8}$$

などと表される。ここで、積分定数 $A,\ B,\ C,\ \delta$ は実数、D は複素数である。

問題 6.1 調和振動子の解 (6.8) の、(C,δ) を (A,B) で表せ。また、(C,δ) と D はどう関係づけられるか。

問題 6.2 運動方程式 (6.6) の解を、線形常微分方程式の一般解法に従って、$x=e^{i\omega t}$ とおいて代入すると $\omega=\pm\omega_0$ を得るので、式 (6.6) の一般解は $x=C_1e^{i\omega_0 t}+C_2\,e^{-i\omega_0 t}$ となる。数学的には C_1 と C_2 は積分定数で任意の複素数であるが、物理的には座標 x は実数でなければならない。そのためには C_1 と C_2 はどのような条件を満たさなければならないか？その場合、この解は式 (6.8) とどのように対応しているか？

6.1.1 強制振動

系に、時間に依存する外場 $V(x,t)$ が作用していたとする。これを $U(x)$ の平衡点 $x=0$ の周りに展開すると、

$$\begin{aligned} V(x,t) &= V(0,t) + \left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} x + \cdots \\ &\approx -xF(t) + \text{const.} \end{aligned} \tag{6.9}$$

となる。但し、$V(0,t)$ は運動方程式に寄与しないので const. とし、

$$F(t) \equiv -\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{6.10}$$

とした。すると、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + xF(t) \tag{6.11}$$

運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \tag{6.12}$$

で与えられる。

周期的な外場

$$F(t) = f\cos\omega t = \mathrm{Re}\big[fe^{i\omega t}\big] \tag{6.13}$$

の場合について解いてみる。

方程式 (6.12) は非斉次線形微分方程式なので、一般解は

$$\boxed{\text{非斉次式の一般解}} = \boxed{\text{斉次式の一般解}} + \boxed{\text{非斉次式の特解}} \tag{6.14}$$

の関係式で与えられる。斉次式の一般解は既に式 (6.8) で与えられているので、非斉次式 (6.12) の特解を求めればよい。それを、複素表示を用いて

$$x = Ee^{i\omega t}$$

と置いて、式 (6.12) に代入すると、

$$\bigl(-m\omega^2 + m\omega_0^2\bigr)Ee^{i\omega t} = fe^{i\omega t},$$

これから、

$$E = \frac{f}{m\bigl(\omega_0^2 - \omega^2\bigr)} \qquad \text{for } \omega \neq \omega_0$$

をえる。結局、式 (6.12) の一般解は

$$x = \mathrm{Re}\left[De^{i\omega_0 t} + \frac{f}{m\bigl(\omega_0^2 - \omega^2\bigr)}e^{i\omega t}\right] \tag{6.15}$$

となる。一方、$\omega = \omega_0$ で外場が調和振動子に共鳴している場合には、解は

$$x = \mathrm{Re}\left[\left(D - i\frac{f}{2m\omega_0}t\right)e^{i\omega_0 t}\right] \tag{6.16}$$

とで与えられることが示される。この第 2 項は時間 t ともに大きくなるので、いずれ微小振動の近似が崩れて式 (6.12) が成り立たなくなる。

問題 6.3 $\omega = \omega_0$ の時、式 (6.16) が方程式 (6.12) の解であることを示せ。

6.2 多自由度系の微小振動

n 自由度系の安定な平衡点のまわりの微小振動を考えよう。一般化座標を $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ とし、安定平衡点が $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0$ にあるとする。そこでポテンシャルは極小なので、一階の微分係数は全てゼロ、

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0} = 0 \tag{6.17}$$

である。一自由度の時と同様に、ポテンシャルを平衡点 $\boldsymbol{q}_0$ の周りで展開し

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{q}) &= U(\boldsymbol{q}_0) + \sum_{ij}\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_0}(q_i - q_{0,i})(q_j - q_{0,j}) + \cdots \\ &= \sum_{ij}\frac{1}{2}C_{ij}x_i x_j + \text{const.} \end{aligned} \tag{6.18}$$

と近似できる。但し、

$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_0 \tag{6.19}$$

で、行列 C_{ij} は

$$C_{ij} \equiv \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_0} \tag{6.20}$$

である。一方、運動エネルギーは、x_i およびその時間微分の2次までの近似で、

$$T=\sum_{ij}\frac{1}{2}B_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j\approx\sum_{ij}\frac{1}{2}B_{ij}(\boldsymbol{q}_0)\dot{x}_i\dot{x}_j \tag{6.21}$$

と表される。結局、ラグランジアンは

$$\begin{aligned}L&=\sum_{ij}\left(\frac{1}{2}B_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j-\frac{1}{2}C_{ij}x_ix_j\right)\\&=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^t\hat{B}\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^t\hat{C}\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{6.22}$$

と表される。ここで、行列 $\hat{B}\equiv(B_{ij})$ 及び $\hat{C}\equiv(C_{ij})$ はどちらも2次形式の係数行列なので、対称行列

$$B_{ij}=B_{ji},\qquad C_{ij}=C_{ji} \tag{6.23}$$

としてよい。また、これらの行列は**正定値**でなければならない[1]。

問題 6.4 実対称行列 C_{ij} が正定値であれば、その固有値が全て正であることを示せ。また、その逆も成り立つことを示せ。

問題 6.5 なぜ、行列 B_{ij} および C_{ij} は正定値でなければならないか？

問題 6.6 運動エネルギー T が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0$ およびその時間微分の2次までの近似で式 (6.21) となることを説明せよ。

6.2.1 運動方程式

ラグランジアンが (6.22) のとき、x_i の正準共役な運動量 p_i は

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}=\sum_j B_{ij}\dot{x}_j \tag{6.24}$$

となり、運動方程式は

$$\sum_j\Big(B_{ij}\ddot{x}_j+C_{ij}x_j\Big)=0\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.25}$$

で与えられる。

定数係数の線形常微分方程式の一般解法に従い、解を

$$x_j=a_je^{i\omega t}\qquad(j=1,2,\cdots,n) \tag{6.26}$$

と置いて、a_j および ω が満たす式を求めよう。但し、一般に a_j は複素数である。[2] これを、運動方程式 (6.25) に代入することにより、

$$\sum_j\Big(-\omega^2B_{ij}a_j+C_{ij}a_j\Big)=0\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.27}$$

を得る。これは、行列表示すると

$$\omega^2\,\hat{B}\boldsymbol{a}=\hat{C}\boldsymbol{a} \tag{6.28}$$

と表される。

---

[1] $\boldsymbol{a}\neq 0$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}^t\hat{A}\boldsymbol{a}>0$ のとき、行列 $\hat{A}$ は正定値という。

[2] 物理量を表す実数解は、複素解 (6.26) の実部（または虚部）で与えられる。

一般化固有値問題

式 (6.28) を満たす ω^2 と $\boldsymbol{a}$ の組を求める問題を、**一般化固有値問題**という。ω^2 と $\boldsymbol{a}$ はそれぞれ**固有値**と**固有ベクトル**である。今の問題では、行列 $\hat{B}$ と $\hat{C}$ は実対称で正定値である。

式 (6.28) は

$$\left(\omega^2\hat{B} - \hat{C}\right)\boldsymbol{a} = 0$$

と変形できるので、これが $\boldsymbol{a} = 0$ 以外の解をもつための条件は、行列 $\left(\omega^2\hat{B} - \hat{C}\right)$ が逆行列を持たない条件、即ち、

$$\det\left|\omega^2\hat{B} - \hat{C}\right| = 0 \tag{6.29}$$

で与えられる[3]。これは**特性方程式**と呼ばれ、この解が固有値 ω^2 である。

式 (6.29) は $n \times n$ 行列の行列式なので、ω^2 の n 次方程式であり、一般に n 個の解、即ち、固有値 ω_α^2 $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ がある。固有値 ω_α^2 が求まれば、それぞれの ω_α^2 に対して、式 (6.28) より固有ベクトル $\boldsymbol{a}^\alpha$ が比例係数を除いて求まる。

一般に、実対称行列、或いはより広くエルミート行列 $\hat{B}$、$\hat{C}$ に対する一般化固有値問題 (6.28) の固有値 ω_α^2、固有ベクトル $\boldsymbol{a}^\alpha$ は、

$$\omega_\alpha^2\,\hat{B}\boldsymbol{a}^\alpha = \hat{C}\boldsymbol{a}^\alpha \tag{6.30}$$

を満たし、以下の性質をもつ。

(1) 固有値 ω_α^2 は実数である。

(2) 異なる固有値に属する固有ベクトル $\boldsymbol{a}^\alpha$ と $\boldsymbol{a}^\beta$ は、一般化された直交関係

$$\boldsymbol{a}^{\alpha\dagger}\hat{B}\,\boldsymbol{a}^\beta = 0 \tag{6.31}$$

を満たす[4]。

今の問題では、更に $\hat{B}$ および $\hat{C}$ が正定値であることから、

(3) 固有値 ω_α^2 は正

である。

$\hat{B}$ が正定値より $\boldsymbol{a}^{\alpha\dagger}\hat{B}\boldsymbol{a}^\alpha > 0$ なので、$\boldsymbol{a}^\alpha$ を規格化することにより、式 (6.31) は

$$\boldsymbol{a}^{\alpha\dagger}\,\hat{B}\,\boldsymbol{a}^\beta = \delta_{\alpha,\beta} \tag{6.32}$$

とすることができる。そこで行列 $\hat{A}$ を

$$\hat{A} \equiv \left(\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \cdots, \boldsymbol{a}^n\right) \quad \text{或いは} \qquad A_{i\alpha} \equiv a_i^\alpha \tag{6.33}$$

と定義すると、これは

$$\hat{A}^\dagger\hat{B}\hat{A} = \hat{I} \tag{6.34}$$

と表される。但し、$\hat{I}$ は単位行列。

---

[3]逆行列が存在すれば $\boldsymbol{a} = \left(\omega^2\hat{B} - \hat{C}\right)^{-1}\mathbf{0} = 0$ より、$\boldsymbol{a} = 0$ だけが解となる。

[4] $\boldsymbol{a}$ は縦ベクトル、$\boldsymbol{a}^\dagger \equiv \boldsymbol{a}^{t*}$ は $\boldsymbol{a}$ を転置して複素共役を取った横ベクトルを表す。

問題 6.7 運動方程式 (6.25) の解として、式 (6.26) のように、全ての x_j に対して同じ角速度 ω を仮定し、$x_j = a_j e^{i\omega_j t}$ のように、角速度に添え字 j をつけなかったのはなぜか？

問題 6.8 1 次方程式 $\hat{A}\,\boldsymbol{x} = 0$ が自明な解 $\boldsymbol{x} = 0$ 以外の解を持つためには、$\det|\hat{A}| = 0$ でなければならない。それはなぜか？

問題 6.9 エルミート行列に対する通常の固有値問題の場合にならって、一般化固有値問題についての上に述べた性質 (1), (2), および (3) を示せ。
〔ヒント〕等式 $\big(\boldsymbol{a}^{\alpha\dagger}\hat{C}\big)\boldsymbol{a}^{\alpha} = \boldsymbol{a}^{\alpha\dagger}\big(\hat{C}\boldsymbol{a}^{\alpha}\big)$ および $\big(\boldsymbol{a}^{\alpha\dagger}\hat{C}\big)\boldsymbol{a}^{\beta} = \boldsymbol{a}^{\alpha\dagger}\big(\hat{C}\boldsymbol{a}^{\beta}\big)$ の両辺を式 (6.30) を用いて計算せよ。

問題 6.10 式 (6.34) が成り立つことを説明せよ。

運動方程式の解

一般化固有値方程式 (6.28) の固有値・固有ベクトルの組 $(\omega_\alpha^2, \boldsymbol{a}^\alpha)$ それぞれに対して、運動方程式 (6.25) には式 (6.26) の形の特解

$$x_j^\alpha(t) = a_j^\alpha\, e^{i\omega_\alpha t} \quad \text{或いは} \quad \boldsymbol{x}^\alpha(t) = \boldsymbol{a}^\alpha\, e^{i\omega_\alpha t} \tag{6.35}$$

がある。これを**基準振動**という。一般解は、基準振動に複素積分定数 C_α をかけて重ね合わせたもの

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha\, e^{i\omega_\alpha t} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{a}^\alpha\, C_\alpha\, e^{i\omega_\alpha t}\end{aligned} \tag{6.36}$$

で与えられる。

6.2.2 基準座標

ここで、**基準座標**と呼ばれる新しい一般化座標 Q_α $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ を

$$\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{a}^\alpha\, Q_\alpha \tag{6.37}$$

で定義しよう。一般解 (6.36) と比べると、Q_α の時間変化は

$$Q_\alpha(t) = C_\alpha\, e^{i\omega_\alpha t} \tag{6.38}$$

となり、これは基準振動を表す変数であることが分かる。式 (6.37) は、式 (6.33) の行列 $\hat{A}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \hat{A}\,\boldsymbol{Q} \quad \text{或いは、} \quad x_j = \sum_{\alpha=1}^{n} a_j^\alpha\, Q_\alpha \tag{6.39}$$

と表わされる。これは、座標 x_j と座標 Q_α の間の座標変換、即ち点変換を表す式である。

基準座標 Q_α を用いてラグランジアンを表してみよう。ラグランジアン (6.22) の第 1 項の運動エネルギー T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^\dagger \hat{B}\,\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2}\left(\hat{A}\,\dot{\boldsymbol{Q}}\right)^\dagger \hat{B}\left(\hat{A}\,\dot{\boldsymbol{Q}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{Q}}^\dagger \hat{A}^\dagger \hat{B}\,\hat{A}\,\dot{\boldsymbol{Q}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{Q}}^\dagger \hat{I}\,\dot{\boldsymbol{Q}} = \sum_\alpha \frac{1}{2}\dot{Q}_\alpha^2 \end{aligned} \tag{6.40}$$

となる。ただし、式 (6.34) および Q_α は実数であることを用いた。

第 2 項のポテンシャルエネルギー U は、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\dagger \hat{C}\,\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\left(\hat{A}\,\boldsymbol{Q}\right)^\dagger \hat{C}\left(\hat{A}\,\boldsymbol{Q}\right) \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}^\dagger \hat{A}^\dagger \hat{C}\,\hat{A}\,\boldsymbol{Q} \end{aligned} \tag{6.41}$$

となるが、

$$\begin{aligned} \hat{A}^\dagger \hat{C}\,\hat{A} &= \hat{A}^\dagger \hat{C}\left(\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \cdots, \boldsymbol{a}^n\right) \\ &= \hat{A}^\dagger\left(\hat{C}\,\boldsymbol{a}^1, \hat{C}\,\boldsymbol{a}^2, \cdots, \hat{C}\,\boldsymbol{a}^n\right) \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{1\dagger} \\ \boldsymbol{a}^{2\dagger} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{n\dagger} \end{pmatrix} \left(\omega_1^2 \hat{B}\,\boldsymbol{a}^1, \omega_2^2 \hat{B}\,\boldsymbol{a}^2, \cdots, \omega_n^2 \hat{B}\,\boldsymbol{a}^n\right) \\ &= \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_n^2 \end{pmatrix} \equiv \hat{\Omega}_d^2 \end{aligned} \tag{6.42}$$

であるから、結局

$$U = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{Q}^\dagger \hat{\Omega}_d^2\,\boldsymbol{Q} = \sum_\alpha \frac{1}{2}\,\omega_\alpha^2 Q_\alpha^2 \tag{6.43}$$

となる。

これらの結果から、ラグランジアンは基準座標で表すと

$$L = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right) \tag{6.44}$$

となり、互いに独立な n 個の調和振動子の和になっている。また、正準運動量は

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \dot{Q}_\alpha \tag{6.45}$$

ラグランジュ方程式は

$$\ddot{Q}_\alpha = -\omega_\alpha^2 Q_\alpha \tag{6.46}$$

で与えられる。即ち、多自由度の微小振動の問題は、基準座標で表すと、6.1 節で議論した一自由度の調和振動子の問題に帰着する。

問題 6.11 固有値は ω^2 で与えられるので、ω の値としては $\pm\omega_\alpha$ が可能である。ところが、式 (6.35) 或いは式 (6.36) では $+\omega_\alpha$ の解しか用いなかったのはなぜか？

問題 6.12 式 (6.42) が成り立つことを説明せよ。

第7章　ハミルトンの正準方程式

7.1　正準方程式

第3章では、ニュートンの運動方程式とハミルトンの原理が等価であることを示した。即ち、時刻 $t_1 \le t \le t_2$ の間の軌道の始点と終点を決めたとき、その間のニュートンの運動方程式を満たす軌道 $q(t)$ はラグランジュ関数

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U \tag{7.1}$$

の積分、即ち作用積分を停留にする[1]：

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \right) = 0. \tag{7.2}$$

またその逆、つまり、ハミルトンの原理を満たす軌道はラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.3}$$

を満たし、それを直角座標で表せばニュートンの運動方程式を与える。この左辺第1項に、一般化座標 q_i に正準共役な運動量

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.4}$$

を用いると、正準運動量 p_i の時間微分が

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}; \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.5}$$

で与えられることはすでに5.1節で見た。

さて、ラグランジュ関数 L は変数 $(q, \dot{q}, t)$ の関数として扱ってきたが、$\dot{q}$ の代わりに式 (7.4) で定義される運動量 p を用いて、(q, p, t) を自然な変数とする関数を考えよう。この関数は以前に式 (5.7) で定義した関数 H

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \tag{7.6}$$

で与えられる。この関数 $L(q, \dot{q}, t)$ から関数 $H(q, p, t)$ への変換は、熱力学でもおなじみの**ルジャンドル変換**になっていることが分かる。

[1]多自由度の場合にはラグランジュ関数は $L(q_1, q_2, \cdots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, t)$ と記述すべきであるが、以下では引数を略して $L(q, \dot{q}, t)$ と書くことにする。

実際、ラグランジュ関数 L の全微分は

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\dot{p}_i \, dq_i + p_i \, d\dot{q}_i \big) + \frac{\partial L}{\partial t} \, dt \end{aligned} \tag{7.7}$$

であるから、関数 H の全微分は

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{n} \big(p_i \, d\dot{q}_i + \dot{q}_i \, dp_i \big) - dL \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(-\dot{p}_i \, dq_i + \dot{q}_i \, dp_i \big) - \frac{\partial L}{\partial t} \, dt \end{aligned} \tag{7.8}$$

となる。これは、(q, p, t) が関数 H の自然な変数であることを示している。そこで、式 (7.4) を $\dot{q}_i$ について解いた表式

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t) \tag{7.9}$$

を用いて、式 (7.6) の H を変数 (q, p, t) の関数 $H(q, p, t)$ として表したもの

$$H(q, p.t) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \, \dot{q}_i(q, p, t) - L\big(q, \dot{q}(q, p, t), t\big) \tag{7.10}$$

を**ハミルトン関数**あるいは**ハミルトニアン**と呼ぶ[2]。

ハミルトン関数 $H(q, p, t)$ の全微分の表式

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \, dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \, dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \, dt$$

を式 (7.8) と比べることにより

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \tag{7.11}$$

をえる。最初の 2 つの式を**ハミルトンの正準方程式**という。また、方程式を記述する一般化座標とそれに正準共役な運動量 (q_i, p_i) $(i = 1, \cdots, n)$ を、それぞれ**正準座標**、**正準運動量**、あるいは合わせて**正準変数**という。

ニュートンの運動方程式やラグランジュ方程式は座標 q の 2 階の常微分方程式であったのに対し、ハミルトンの正準方程式は座標 q と運動量 p との連立 1 階常微分方程式であることに注意しよう。つまり、正準方程式 (7.11) の第 1 式は式 (7.4) と同じものになるが、ここでは運動量の定義式ではなく運動方程式の一部となっている。

[2] 既に式 (5.9) で示したように、関数 H は多くの場合エネルギーを与えるが、エネルギーを表す関数が即ちハミルトニアンではない。

ハミルトン関数 H の定義式 (7.10) から分かるように、ラグランジュ関数 L に含まれない循環座標は H にも含まれないので、それに正準共役な運動量が保存することは正準方程式 (7.11) からも示される。また、L が時間 t を陽に含まないとき H も t を陽に含まず、その時 H は保存する：

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i\,\dot{p}_i - \dot{p}_i\,\dot{q}_i\right) = 0.$$

問題 7.1 ハミルトン関数の全微分の式 (7.8) を示せ。

問題 7.2 ポテンシャルが速度 $\{\dot{q}\}$ によらず、運動エネルギーが $\{\dot{q}\}$ の二次形式の時、式 (7.4) を $\dot{q}_i$ について解いて式 (7.9) のように (q, p, t) の関数として表されることを示せ。［ヒント］この時、ラグランジュ関数は一般に

$$L = \sum \frac{1}{2}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q)$$

と書ける。運動エネルギーがいつも正であることから、行列 $\{a_{ij}(q)\}$ は正定値なので、逆行列が存在する。

問題 7.3 ハミルトン関数 H の定義式 (7.10) から、偏微分 $\partial H/\partial q$、$\partial H/\partial p$ を計算することにより、ハミルトンの正準方程式 (7.11) を導出せよ。1 自由度の場合を考えよ。

問題 7.4 A 君は、前問の解答として、ハミルトンの正準方程式を

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\Big(p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)\Big) = \frac{\partial}{\partial p}\Big(p\dot{q}\Big) - \frac{\partial}{\partial p}\Big(L(q, \dot{q}, t)\Big) = \dot{q} - 0$$

のように導出した。これは誤り、あるいは、不充分である。どこが不十分か説明せよ。

問題 7.5 ラグランジュ関数が $L = (1/2)m\dot{x}^2 - U(x)$ で与えられるとき、ハミルトン関数 H およびハミルトンの正準方程式を求めよ。

問題 7.6 循環座標はハミルトン関数 H にも含まれないことを確かめよ。

問題 7.7 第 4.1.2 節で求めた、2 次元回転座標系でのラグランジュ関数

$$L = \frac{1}{2}m\Big[\big(\dot{X} - \omega Y\big)^2 + \big(\dot{Y} + \omega X\big)^2\Big] - U(X, Y)$$

に対するハミルトン関数 H を求めよ。この H はエネルギーに一致するか?

7.2　変形されたハミルトンの原理

ラグランジュ方程式がハミルトンの変分原理 (3.3) から導かれたように、ハミルトンの正準方程式 (7.11) も変分原理から導くことができる。それは以下の**変形されたハミルトンの原理**である。

（変形されたハミルトンの原理）任意の時間間隔 $t \in [t_1, t_2]$ において、位相空間内の軌道 $\big(q(t), p(t)\big)$ の中で実際に実現するは、任意の仮想変位 $\big(\delta q(t), \delta p(t)\big)$ に対して、停留条件

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i - H(q,p,t)\right)dt\right) = 0 \tag{7.12}$$

を満たす軌道である。ただし、仮想変位は時刻の両端でゼロのものを取る。

この変分原理から正準方程式が導かれることの形式的な証明は簡単だ。

証明： 関数 $q_i(t)$ と $p_i(t)$ $(i = 1, \cdots, n)$ を $2n$ 個の独立な関数として、変分 (7.12) を取ると、

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta p_i\,\dot{q}_i + p_i\delta\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\delta p_i\right)dt \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i(t)\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(-\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(-\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i(t) + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i(t)\right)dt = 0
\end{aligned}$$

これが任意の $\big(\delta q(t), \delta p(t)\big)$ に対して成り立つ条件として、ハミルトンの正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{7.13}$$

を得る。 ■

逆に、上の論理を逆にたどれば、正準方程式から変形されたハミルトンの原理を導くこともできるので、両者は等価である。

7.2.1 ハミルトンの原理と変形されたハミルトンの原理の関係

変形されたハミルトンの原理 (7.12) は単純に式 (7.2) の L を式 (7.10) を用いて書き換えただけにみえる。しかし以下で議論するように、「ハミルトンの原理」と「変形されたハミルトンの原理」とはいくつかの重要な点が異なり、

> 「変形されたハミルトンの原理」は、単に「ハミルトンの原理」の被積分関数を式 (7.2) を用いて書き換えたものではない

ことに注意をするべきである。

$\dot{q}$ の扱い：

まず、「変形されたハミルトンの原理」の被積分関数中の $\dot{q}$ は $q(t)$ の時間微分であって、式 (7.9) で与えられる、(q, p, t) の関数としての $\dot{q}(q, p, t)$ ではない。もし $\dot{q}$ を $\dot{q}(q, p, t)$ として扱うと、式 (7.13) に至る正準方程式の導出ができない。

軌道を考える空間：

系の時間発展を表す軌道として、ハミルトンの原理では座標空間に於ける軌道 $q(t)$ を考えていたのに対して、変形されたハミルトンの原理では座標と運動量からなる位相空間に於ける軌道 $\big(q(t), p(t)\big)$ を考える。言い換えると、ハミルトンの原理では座標空間内での軌道 $q(t)$ が与えられればそれから $\dot{q}(t)$ が決まり、運動量は q と $\dot{q}$ の関数として $p \equiv \partial L/\partial\dot{q}$ で定義されるので、$q(t)$ と $p(t)$ は独立ではない。一方、変形されたハミルトンの原理では、座標 q と運動量 p は独立な変数として導入され[3]、両者の関係は変分条件から導かれる方程式 (7.13) によって与えられる。

軌道の端点条件：

ハミルトンの原理は、始点と終点の座標の値 $q(t_1)$ と $q(t_2)$ を任意に与えたとき、その両端を結ぶ軌道 $q(t)$ のうち作用積分を停留にするものが実際に実現する、というものである。与えられた両端を結ぶ軌道のなかで実際に実現するものが満たす条件なので、考える仮想変位 δq は端点でゼロとする。始点と終点を任意に与えても、両者を結ぶ運動方程式の解はいつも存在する。

一方、変形されたハミルトンの原理では、位相空間での始点 $(q(t_1), p(t_1))$ と終点 $(q(t_2), p(t_2))$ の両方を任意には与えられない。なぜなら、例えば両端で座標を与えると、運動方程式を見たす解は一つに決まり、それから両端での運動量は決まってしまうからだ。即ち、位相空間内に始点と終点を任意に与えても、両者を結ぶ運動方程式の解があるとは限らない。

変形されたハミルトンの原理 (7.12) をハミルトンの原理 (3.1) または (3.3) と同様に定式化しようとすると、

> **(変形されたハミルトンの原理)** 時刻 t_1 に $q = q_1$ 上から出発し時刻 t_2 に $q = q_2$ 上で終わる位相空間内の軌道 $\big(q(t), p(t)\big)$ のなかで、汎関数
> $$I[q,p] = \left(\int_{t_1}^{t_2} \Big(p\,\dot{q} - H(q,p,t)\Big)dt\right)$$
> を停留にする軌道が実際に実現する。

または、

> **(変形されたハミルトンの原理)** 始点と終点での座標 q の値が与えられた位相空間内の系の軌道 $\big(q(t), p(t)\big)$ のうち、汎関数の停留条件
> $$\delta I[q,p] = \delta\left(\int_{t_1}^{t_2} \Big(p\,\dot{q} - H(q,p,t)\Big)dt\right) = 0$$
> を満たす軌道が実際に実現する。ただし変分は、端点で座標の仮想変位 $\delta q(t)$ がゼロとなる任意の仮想変位 $\big(\delta q(t), \delta p(t)\big)$ に対して取る。

というようになる。つまり、考える変分は、端点で座標 q の値が与えられていることに対応して δq は端点でゼロとすべきだが、端点での運動量 p の値は与えていないので端点で δp はゼロに制限すべきではないということ

[3] 式 (7.12) の被積分関数の中の $\dot{q}_i$ は軌道 $q_i(t)$ の時間微分で与えられる。q と p の関数として式 (7.9) で与えられるものではないことに注意。

になってしまう。そうしても、式 (7.12) の被積分関数には $\dot{p}$ が含まれないので式 (7.13) を導くのには特に問題はない。

停留条件の定式化：

しかし以下で議論するように、ハミルトンの正準方程式の特徴は座標 q と運動量 p を同等に扱うところにあり、その結果、両者を自由に混ぜた正準変換を考えることができるのである。それにもかかわらず、変形されたハミルトンの原理を定式化する際に、ラグランジュ方程式を導いたハミルトンの原理に対する端点条件をそのまま引き継いで、座標と運動量で異なる端点条件を用いると、正準変換の議論を不自然に複雑にしてしまう。

ハミルトンの正準方程式の重要な点は座標と運動量を同等に扱うところにあるので、それを導く変形されたハミルトンの原理も座標と運動量を同等に扱って定式化したい。しかし、運動方程式に矛盾せずに位相空間内の軌道の始点と終点の両方を任意に与えることはできない。そこで、軌道 $\big(q(t), p(t)\big)$ の両端は指定しないが、変分を定義する仮想変位 $\big(\delta q(t), \delta p(t)\big)$ は、座標と運動量の両者に対してどちらも端点でどちらもゼロ

$$\big(\delta q(t_1), \delta p(t_1)\big) = \big(\delta q(t_2), \delta p(t_2)\big) = 0 \tag{7.14}$$

という制限を加えることにする。そうしても式 (7.12) から正準方程式を導くことができるし、その場合には座標と運動量を混ぜた変換を考えても、新しい変数の端点での仮想変位はいつもゼロとできる。

以上のような議論のもとに、軌道の端点は指定せず、端点での仮想変位をゼロとする変分によって、変形されたハミルトンの原理を定式化した[4]。これまでの議論から明らかなことだが、この変分に対する停留条件を満たす軌道には、端点が異なるものが連続的に存在する。逆に、端点を任意に与えると、停留条件を満たす軌道は一般には存在しない。従って、停留条件 (7.12) は、ハミルトンの原理 (3.1) の場合のように、「与えられた 2 点を結ぶ軌道に対する汎関数の停留条件」とは解釈できない。

7.2.2　変分原理は微分方程式より基本的な原理か？

これまで見てきたように、ニュートンの運動方程式、ハミルトンの停留作用の原理、オイラー・ラグランジュ方程式、ハミルトンの正準方程式、変形されたハミルトンの原理はすべて等価で、いずれかが成り立てば他も成り立つ。しかし、ニュートンの運動方程式のような微分原理に比べて、ハミルトンの原理のような変分原理のほうが、何やら意味深長な感じがして、より基本的な自然法則とみなしたくなるかもしれない。

しかしながら上で見たように、同じ変分原理でも「変形されたハミルトンの原理」が「ハミルトンの原理」から直接導かれるという訳ではな

[4]この変形されたハミルトンの原理の定式化は、“Classical Mechanics” third ed. (Goldstein, Poole, and Safko 著, 2002 年) の第 8.5 節 (p.353) に依る。

い。論理的には、微分原理であるハミルトンの正準方程式を経由して「変形されたハミルトンの原理」が導かれると考えるほうが自然だ。結局のところ古典力学の範囲内では、これらの変分原理も対応する微分方程式と同等であるという意味で正当化されているに過ぎず[5]、どれかがより基本的というわけではないようだ。

問題 7.8 正準方程式から、変形されたハミルトンの原理を導け。

問題 7.9 式 (7.12) の被積分関数を $F(q, \dot{q}, p, \dot{p})$ として、そのオイラー・ラグランジュ方程式が正準方程式になることを確かめよ。

問題 7.10 式 (7.12) の被積分関数を

$$-\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \, q_i - H(q, p, t)$$

で置き換えても、停留条件から正準方程式 (7.11) が得られることを示せ。

7.3 ポアソン括弧式

一般化座標 q_i とその共役運動量 p_i の関数 $u(q,p)$ と $v(q,p)$ に対して、

$$\{u, v\} \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \tag{7.15}$$

で定義される括弧記号 $\{\quad,\quad\}$ を**ポアソン括弧式**という。

これを用いると、ハミルトンの正準方程式は

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} \tag{7.16}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\} \tag{7.17}$$

のように、座標と運動量に対して全く対称な形に表すことができる。

また、(q,p,t) の任意の関数 $F(q,p,t)$ の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \tag{7.18}$$

と表される。これから、

t を陽に含まない量 F は、$\{F, H\} = 0$ であれば保存する (7.19)

ことが分かる。

[5]変分原理と微分原理との関係について、Goldstein 達は次のように述べている：After all, no further argument was givn for the validity of Hamilton's principle than that it corresponds to the Lagrangian equations of motion. (Goldstein, Poole, and Safko, p.355 in "Classical Mechanics", 3rd ed., Addison Wesley, 2002.)

問題 7.11 座標と運動量のポアソン括弧式が

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$$

となることを示せ。

問題 7.12 中心力場中の質点の角運動量 $\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ の各成分が保存量であることを、ポアソン括弧式を用いて示せ。［ヒント］ハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(r); \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

で与えられる。

7.4 正準変換

第 4 章で見たように、ラグランジュの運動方程式 (7.3) は座標 q と

$$q_i = q_i(Q, t) \text{ および逆に解いて } Q_i = Q_i(q, t);\ (i = 1, \cdots, n) \tag{7.20}$$

で関係づけられる別の座標変数 Q へ変換しても、ラグランジュ関数を Q で表せば、式 (7.3) と同じ形の方程式が変数 Q に対して成り立つ。これは、第 3.1 節で議論した変分原理は、どんな座標を用いてもラグランジュ関数 L を用いれば同じ形式で表されるからである。式 (7.20) のような座標と座標の間の変換を**座標変換**、あるいは**点変換**という。つまり、

> ラグランジュ方程式 (7.3) は座標変換をしても形を変えない。

ラグランジュ方程式から正準方程式を導いた議論は、変数 Q に対しても同様にできるので、

> ハミルトンの正準方程式 (7.11) も座標変換に対して形を変えない

こともすぐに分かる。

一方、ハミルトンの正準方程式 (7.11) では、座標と運動量を独立変数と扱っているので、座標変換 (7.20) よりも更に広い変数変換、即ち、座標と運動量を混ぜた

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t); \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{7.21}$$

のような変数変換を考えることができる。そこで問題は、

> 変数変換 (7.21) に対して、
> 　　　正準方程式 (7.11) は形を変えないか？

残念ながら、一般にはこれは成り立たない。しかし、$H(q,p,t)$ の代わりに関数$K(Q,P,t)$をうまく選ぶことによって、運動方程式を式 (7.11) と同じ形の方程式

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}; \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{7.22}$$

で表すことができる場合がある。ここで、関数 $K(Q,P,t)$ は、新しい変数に対してハミルトン関数の役割を果たしている。正準変数の定義を少し拡張して、

> 正準変数とは正準方程式と同じ形の方程式 (7.22) を満たす変数の組

としよう。

正準方程式 (7.11)、或いはより一般に式 (7.22) の形の方程式を満たす変数の間の変換はどうすれば得られるか、以下で議論する。

問題 7.13 変数 (Q,P) が式 (7.22) を満たす時、$K(Q,P,t)$ から逆にラグランジュ関数 $L(Q,\dot{Q},t)$ を構成して、ラグランジュ方程式を導出せよ。

7.4.1 正準変換とその母関数

すでに述べたように、正準方程式 (7.11) と変形されたハミルトンの原理 (7.12) が等価であることに注意しよう。即ち、式 (7.12) の被積分関数を新しい変数 (Q,P) で表して、それと同様の形

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i - H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\dot{Q}_i - K(Q,P,t) \tag{7.23}$$

に変形できれば、停留条件

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\,\dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right)dt\right) = 0 \tag{7.24}$$

から直ちに正準方程式 (7.22) が得られる。

しかし、式 (7.23) は条件として厳しすぎる[6]。式 (7.23) に時間 t の全微分の項が付け加わって、

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i - H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\dot{Q}_i - K(Q,P,t) + \frac{d}{dt}F(q,p,Q,P,t) \tag{7.25}$$

となっても、変数 (Q,P) に対して正準方程式 (7.22) は導かれる[7]。ここで、関数 F は (q,p,Q,P,t) の任意の関数である。

---

[6]式 (7.23) が成り立つためには、$\dot{q}$ から $\dot{Q}$ だけが出てこなければならない。つまり、q が Q だけに依存する、即ち座標変換 (7.20) でなければならない。

[7]等式 (7.25) ではなく、両辺の比例式としても式 (7.22) は得られるが、ここでは等式の場合のみを考える。比例式の場合は、後で議論するスケール変換を含む。

理由：この場合の停留条件は

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\,\dot{Q}_i - K(Q,P,t) + \frac{dF}{dt}\right)dt\right) = 0 \qquad (7.26)$$

となるが、最後の dF/dt の項は

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dF}{dt}\,dt = \Big[F(q,p,Q,P,t)\Big]_{t_1}^{t_2} \qquad (7.27)$$

と積分できるので、(q,p,Q,P) の境界 $t=t_1$ と t_2 での値のみで決まり、途中の時刻 $t\in(t_1,t_2)$ での軌道には依らない。

即ち、停留条件 (7.26) は

$$\left[\sum_{i=1}^{n} P_i\delta Q_i + \delta F\right]_{t_1}^{t_2} + \\ \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(-\left(\dot{P}_i + \frac{\partial K}{\partial Q_i}\right)\delta Q_i + \left(\dot{Q}_i - \frac{\partial K}{\partial P_i}\right)\delta P_i\right)dt = 0 \quad (7.28)$$

で与えられる。式 (7.14) より端点での (q,p) の変分はゼロとしているので、それに対応して新しい変数の変分もゼロ

$$\big(\delta Q_i(t_1),\delta P_i(t_1)\big) = \big(\delta Q_i(t_2),\delta P_i(t_2)\big) = 0 \qquad (7.29)$$

であるから、式 (7.28) の最初の境界項の変分はゼロ、

$$\left[\sum_{i=1}^{n} P_i\delta Q_i + \delta F\right]_{t_1}^{t_2} = \Bigg[\sum_{i=1}^{n} P_i\delta Q_i(t) + \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i(t) + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i(t) + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\delta Q_i(t) + \frac{\partial F}{\partial P_i}\delta P_i(t)\right)\Bigg]_{t_1}^{t_2} = 0$$

である。その結果、式 (7.28) より式 (7.22) が導かれる。

結局、正準変数 (q,p) から変数変換 (7.21) で与えられる変数 (Q,P) が、関係式 (7.25) を満たせば、正準方程式と同じ形の方程式 (7.22) を満たす。即ち、(Q,P) も正準変数であることがわかる。変数変換のうち式 (7.25) を満たす関数 F が存在するものを**正準変換**という。次節で議論するように、逆に関数 F が与えられれば、式 (7.25) から 2 組の変数 (q,p) と (Q,P) の間の変換を F を用いて表すことができるので、関数 F を**正準変換の母関数**という。つまり、

正準変換とは、正準変換の母関数で表される変数変換

である。次節で具体的に見るように、正準変換は母関数 F だけで与えられ、<u>系のハミルトニアンによらない</u>ことに注意しよう。

拡張された正準変換

座標と運動量をそれぞれ定数倍する、いわゆる**スケール変換**

$$Q = a\,q, \quad P = b\,p, \quad K = ab\,H\,; \quad (a,\,b:\ \text{定数}) \qquad (7.30)$$

を考える。変数 (q,p) が正準方程式 (7.11) を満たせば、変数 (Q,P) も正準方程式と同じ形の式 (7.22) を満たすことはすぐに確かめられる。すなわち、変数 (Q,P) も正準変数である。しかし、

$$p\dot{q} - H = \frac{1}{ab}\big(P\dot{Q} - K\big)$$

となり、この式は、$ab \neq 1$ の場合には式 (7.25) の形にならないので、スケール変換 (7.30) は正準変換ではない。

スケール変換を含めた変換を表すためには、式 (7.25) に比例係数 λ をいれて

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i - H(q,p,t)\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\dot{Q}_i - K(Q,P,t) + \frac{d}{dt}F \tag{7.31}$$

と拡張する必要がある。この式で表される変換を**拡張された正準変換**とよび、正準変換とは区別する。拡張された正準変換は、正準変換とスケール変換の合成変換として表される。

スケール変換を含む「拡張された正準変換」は、ポアソン括弧式の値や、後で議論する正準不変量の値を変えてしまう。これらは解析力学の理論で重要な役割を果たすので、それを不変にしない変換を正準変換に含めてしまうと都合が悪い。

問題 7.14 変数 (q,p) と変数 (Q,P) が式 (7.30) で関係づけられているとき、ポアソン括弧式 $\{u,v\} = \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial v}{\partial p} - \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q}$ を変数 (Q,P) の偏微分を用いて表わせ。

7.4.2 母関数による正準変換の導出

式 (7.25) は、全微分で書くと

$$dF = \sum_{i=1}^{n}\big(p_i\,dq_i - P_i\,dQ_i\big) + (K-H)dt \tag{7.32}$$

と表される。関数 F の $4n$ 個の引数 (q,p,Q,P) のうち、独立な変数は $2n$ 個であることに注意しよう[8]。$2n$ 個の独立変数を、元の変数 (q,p) と新しい変数 (Q,P) の中からうまく組み合わせて取ると、(q,p) から (Q,P) への変数変換を関数 F を用いて表すことができる。特に、表 7.4.2 に掲げる４つの場合を、以下で考える。

1. 独立変数として (q,Q) を取れる場合：

式 (7.32) の右辺を見ると F が変数 (q,Q,t) の関数の場合には、新旧の変数の間の関係が単純に求められることが分かる。この場合の関数 F を

$$F = W_1(q,Q,t) \tag{7.33}$$

[8] (q,p) と (Q,P) は、それぞれ n 組の成分 (q_i,p_i), (Q_i,P_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ を持つ。

独立変数の組	関数 F の形
(q,Q)	$F = W_1(q,Q,t)$
(q,P)	$F = -\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i + W_2(q,P,t)$
(p,Q)	$F = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i + W_3(p,Q,t)$
(p,P)	$F = \sum_{i=1}^{n} \big(p_i q_i - P_i Q_i\big) + W_4(p,P,t)$

表 7.1: 独立変数の組と関数 F の形

と置くことにする。すると、式 (7.32) は

$$dW_1(q,Q,t) = \sum_{i=1}^{n} \big(p_i\,dq_i - P_i\,dQ_i\big) + (K-H)dt \tag{7.34}$$

となるので、

$$\begin{cases} p_i &= \dfrac{\partial W_1(q,Q,t)}{\partial q_i} \\ P_i &= -\dfrac{\partial W_1(q,Q,t)}{\partial Q_i} \\ K &= H + \dfrac{\partial W_1(q,Q,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{7.35}$$

が得られる。最初の 2 式は

$$p_i = p_i(q,Q,t), \quad P_i = P_i(q,Q,t), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.36}$$

という形の式なので、もとの変数 (q,p) と新しい変数 (Q,P) の間の関係式 (7.21) を独立変数を (q,Q) として表したものであることがわかる。最後の式から新しい変数に対するハミルトン関数 K が得られる。関数 F あるいは W_1 は正準変換の母関数である。

2. 独立変数として (q,P) を取れる場合：

この場合 F を

$$F = -\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i + W_2(q,P,t) \tag{7.37}$$

と表すと、その全微分は

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \big(-P_i\,dQ_i - Q_i\,dP_i\big) + dW_2(q,P,t)$$

なので、式 (7.32) は

$$dW_2(q,P,t) = \sum_{i=1}^{n} \big(p_i\,dq_i + Q_i\,dP_i\big) + (K-H)dt \tag{7.38}$$

となり、

$$\begin{cases} p_i &= \dfrac{\partial W_2(q,P,t)}{\partial q_i} \\ Q_i &= \dfrac{\partial W_2(q,P,t)}{\partial P_i} \\ K &= H + \dfrac{\partial W_2(q,P,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{7.39}$$

が得られる。

3. 独立変数として (p,Q) を取れる場合：

F を

$$F = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i + W_3(p,Q,t) \tag{7.40}$$

と表すと、

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \big(p_i\,dq_i + q_i\,dp_i\big) + dW_3(p,Q,t)$$

より、式 (7.32) は

$$dW_3(p,Q,t) = \sum_{i=1}^{n} \big(-q_i\,dp_i - P_i\,dQ_i\big) + (K-H)dt \tag{7.41}$$

となり、

$$\begin{cases} q_i &= -\dfrac{\partial W_3(p,Q,t)}{\partial p_i} \\ P_i &= -\dfrac{\partial W_3(p,Q,t)}{\partial Q_i} \\ K &= H + \dfrac{\partial W_3(p,Q,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{7.42}$$

が得られる。

4. 独立変数として (p,P) を取れる場合：

F を

$$F = \sum_{i=1}^{n} \big(p_i q_i - P_i Q_i\big) + W_4(p,P,t) \tag{7.43}$$

と表すと、式 (7.32) は

$$dW_4(p,P,t) = \sum_{i=1}^{n} \big(-q_i\,dp_i + Q_i\,dP_i\big) + (K-H)dt \tag{7.44}$$

となり、

$$\begin{cases} q_i &= -\dfrac{\partial W_4(p,P,t)}{\partial p_i} \\ Q_i &= \dfrac{\partial W_4(p,P,t)}{\partial P_i} \\ K &= H + \dfrac{\partial W_4(p,P,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{7.45}$$

が得られる。

関数 F に加えて、関数 W_i $(i = 1 \sim 4)$ も正準変換の**母関数**と呼ばれる。それぞれの場合の変数の組を独立変数と取れる限り、どの母関数を用いてもよく、問題設定によって使いやすいものを使えばよい。一般に、一つの正準変換を表すのに用いることができる母関数 W_i は複数ある。

正準変換とハミルトニアンの関係

すでに注意したように、母関数 W_i を与えると正準変換が導出される。導出された変換が正準変換かどうかは、系のハミルトニアンにはよらない。例えば式 (7.35) を見ると、変数変換は最初の 2 つの式で与えられ、それはハミルトニアンには依存していないことが分かる。

実際、変数変換 (7.21) は各時刻で与えられているので、それが正準変換かどうかは、時刻 t を固定して考えてよいはずだ。そこで、例えば式 (7.34) で $dt = 0$ とおいた式

$$\sum_{i=1}^{n} \bigl(p_i dq_i - P_i dQ_i\bigr) = dW_1(q, Q; t) \tag{7.46}$$

を考えてみる[9]。変換式を代入してみて、その結果、左辺が q と Q のある関数の全微分で表されれば、その変換は正準変換である。変換の t 依存性は H と K の関係を与えるが、変換そのものが正準変換かどうかには関係がない。

問題 7.15 停留条件 (7.26) から式 (7.28) を導け。また、式 (7.28) の左辺第一項がゼロとなることを説明せよ。

問題 7.16 母関数 $W_1 = qQ$ が与える正準変換を求めよ。更に、新しい変数 (Q, P) が正準方程式を満たすことを確かめよ。

問題 7.17 点変換、すなわち座標変数同士の変換 $Q_i = f_i(q, t)$ $(i = 1, \cdots, n)$ を与える正準変換の母関数 $W_2(q, P)$ を求めよ。また、この母関数 $W_2(q, P)$ による運動量の変換式を求めよ[10]。

問題 7.18 変換 (7.21) のように、座標 Q の変換式に運動量 p が入っている場合、式 (7.23) は成り立たないことを示せ。

7.4.3 恒等変換と無限小正準変換

式 (7.39) で、

$$W_2(q, P) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i \tag{7.47}$$

[9]時刻 t を固定してパラメタとみなしていることを強調するために (q, Q) と t の間にセミコロン " ; " を入れた。

[10]点変換であっても、運動量の変換式には一般に座標変数が入ることに注意。

ととると、

$$p_i = \frac{\partial W_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i} = q_i, \quad K = H \tag{7.48}$$

となり、新しい変数はもとの変数に等しい。これを**恒等変換**という。

恒等変換から無限小ずれた変換、即ち**無限小正準変換**（あるいは**無限小接触変換**ともいう）

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \qquad P_i = p_i + \delta p_i \tag{7.49}$$

を考える。この変換の母関数は、微小量を ϵ として、式 (7.47) から ϵ 程度ずれた

$$W_2(q, P) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i + \epsilon G(q, P) \tag{7.50}$$

で与えられるだろう。これから導かれる正準変換は式 (7.39) より、

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_i & = P_i + \epsilon \dfrac{\partial G(q,P)}{\partial q_i} \\ Q_i & = q_i + \epsilon \dfrac{\partial G(q,P)}{\partial P_i} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} P_i & = p_i - \epsilon \dfrac{\partial G(q,p)}{\partial q_i} + O(\epsilon^2) \\ Q_i & = q_i + \epsilon \dfrac{\partial G(q,p)}{\partial p_i} + O(\epsilon^2) \end{array} \right. \tag{7.51}$$

を得る。右の表式では右辺の P を p で置き換えた。それでも、微小量 ϵ の 1 次までは正しい。この関数 $G(q, p)$ を**無限小変換の母関数**という。

無限小変換 (7.51) は、母関数 G とのポアソン括弧式を用いて

$$\left\{ \begin{array}{lll} \delta p_i & = -\epsilon \dfrac{\partial G(q,p)}{\partial q_i} & = \epsilon \big\{ p_i, G \big\} \\ \delta q_i & = +\epsilon \dfrac{\partial G(q,p)}{\partial p_i} & = \epsilon \big\{ q_i, G \big\} \end{array} \right. \tag{7.52}$$

と表される。これを用いると、(q, p) の関数 $h(q, p)$ の無限小変換 (7.51) による変化 $\delta h = h(Q, P) - h(q, p)$ は

$$\delta h = \epsilon \big\{ h, G \big\} \tag{7.53}$$

で与えられる。

無限小変換の母関数と保存量

無限小変換の母関数 G によって変換されたハミルトン関数 K が、もとのハミルトン関数 H と同じ形をしているとき、母関数 G が保存量になっていることが示される。

即ち、変換後のハミルトン関数 $K(Q, P, t)$ は

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial t}$$

と与えられるが、式 (7.51) をもちいて、右辺の (q,p) を (Q,P) で表すと、

$$K(Q,P,t) = H(Q,P,t) + \epsilon\left(\{G,H\} + \frac{\partial G}{\partial t}\right)$$

となる。ただし、ϵ のオーダーで右辺第2項の括弧の中では (q,p) と (Q,P) の差を無視できることに注意。

正準変換の下でハミルトン関数が不変、即ち、$K(Q,P,t) = H(Q,P,t)$ であるための条件は

$$\{G,H\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \tag{7.54}$$

となり、これは式 (7.18) より $dG/dt = 0$ を意味する。即ち、

ハミルトン関数を不変にする無限小変換の母関数 $\Leftrightarrow$ 保存量

である。

無限小変換の例

以下にいくつかの簡単な例を挙げる。

1) $G = p_x$ の場合：　G として運動量の x 成分を取ると、式 (7.52) より

$$\delta q_x = \epsilon, \quad \delta q_y = \delta q_z = 0, \qquad \delta p_x = \delta p_y = \delta p_z = 0 \tag{7.55}$$

となり、x 方向に ϵ だけ並進移動する変換に対応している。このことから、x 方向の並進対称な系では運動量の x 成分が保存し、逆に、運動量の x 成分が保存する系では x 方向の並進対称性を持つことがわかる。

2) $G = l_z$ の場合：　角運動量の z 成分を G にとると、$l_z = xp_y - yp_x$ なので、

$$\begin{cases} \delta x = -\epsilon\, y, & \delta y = \epsilon\, x, & \delta z = 0, \\ \delta p_x = -\epsilon\, p_y, & \delta p_y = \epsilon\, p_x, & \delta p_z = 0 \end{cases} \tag{7.56}$$

となる。この変換は、z 軸まわりに微小角 ϵ の回転に対応する。

3) $G = H$ の場合：　ハミルトン関数 H を G にとると、

$$\begin{cases} P_i &= p_i - \epsilon\dfrac{\partial H}{\partial q_i} &= p_i + \dot{p}_i\,\epsilon \\ Q_i &= q_i + \epsilon\dfrac{\partial H}{\partial p_i} &= q_i + \dot{q}_i\,\epsilon \end{cases} \tag{7.57}$$

となり、微小時間 ϵ の並進を与えることが分かる。即ち、時間発展に対応する変数変換は正準変換で、無限小の時間並進変換の母関数はハミルトン関数であることが分かる。またこの場合、ハミルトン関数が不変である条件 (7.54) は

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

即ち、H が陽に t を含まないということで、その場合に H が保存量になる。

ネーターの定理の保存量と無限小変換の母関数

これらの結果は、第 5 章で議論した対称性と保存則との関係と対応している（表 7.2）。即ち、第 5 章では系の並進、回転、時間並進対称性より、それぞれ、運動量、角運動量、エネルギー保存則が導き出されていた。一方、ここでは無限小変換の母関数 G を、運動量、角運動量、ハミルトン関数ととると、それぞれ、並進、回転、時間並進の無限小変換が導かれることが示された。

時間に依存しない座標変換の場合に、ネーター保存量Rが、対応する対称操作を導く母関数Gに一致することが、以下のように容易に確かめられる。すなわち、微小な座標変換は一般に

$$Q_i = q_i + \epsilon f_i(q) \tag{7.58}$$

と表されるので、それにに対する母関数は、式 (7.51) より

$$G(q,p) = \sum_i p_i f_i(q) \tag{7.59}$$

で与えられる。一方、式 (7.58) に対してハミルトニアンが不変な場合のネーター保存量は式 (5.13) より

$$R = \sum_i p_i \frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} = \sum_i p_i f_i(q)$$

となるので、これは上の G に一致する。

問題 7.19 式 (7.47) から変換 (7.48) を導け。

問題 7.20 式 (7.47) 以外に、$W_3(p,Q) = -\sum_{i=1}^{n} p_i Q_i$ も恒等変換を与えることを確かめよ。$W_1(q,Q)$ や $W_4(p,P)$ では恒等変換を表せない。なぜか?

問題 7.21 式 (7.53) を示せ。

問題 7.22 $G = l_z$ の無限小変換 (7.56) が、z 軸まわりに微小角 ϵ の回転に対応することを示せ。［ヒント］角度 α 回転した座標は式 (5.16) で与えられる。

対称性 / 無限小変換	保存量 / 母関数
並進	運動量
回転	角運動量
時間並進	エネルギー (ハミルトン関数)

表 7.2: 対称性と保存量、母関数と無限小変換の関係。

ガリレイ不変性

よく知られているように、ニュートン力学はガリレイ変換に対して不変である。これを、正準変換の下での対称性として記述してみよう。

ハミルトン関数が

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i<j} V\big(|x_i - x_j|\big) \tag{7.60}$$

で与えられる、相互作用している一次元 N 粒子系を考える。この系を速度 v_0 で等速運動している座標系で見ると、新しい座標 x'_i と運動量 p'_i は

$$x'_i = x_i - v_0 t, \qquad p'_i = p_i - m_i v_0 \tag{7.61}$$

と与えられる。この変換は母関数

$$W_2(x, p', t) = \sum_i \left(\big(x_i - v_0 t\big) p'_i + m_i v_0 x_i - \frac{1}{2} m_i v_0^2 t \right) \tag{7.62}$$

を用いて正準変換として表され、新しいハミルトン関数は

$$K(x', p') = H(x, p) + \frac{\partial W_2(x, p', t)}{\partial t} \tag{7.63}$$

と与えられる。これがもとのハミルトン関数 (7.60) と同じ形をしていることは容易に確かめられる[11]。この対称性は任意の v_0 に対して成り立つので、v_0 を微小量とする無限小変換を考える。v_0 の 2 次以上の項は無視して、式 (7.62) を

$$\begin{aligned} W_2(x, p', t) &= \sum_i x_i p'_i + v_0 G(x, p, t), \\ G(x, p, t) &\equiv \sum_i \big(-p_i t + m_i x_i \big) \end{aligned} \tag{7.64}$$

と表わすと、$G(x, p, t)$ は無限小変換の母関数で、保存量である。

問題 7.23 無限小変換の母関数 (7.64) からガリレイ変換 (7.61) が導かれることを確かめよ。さらに、ハミルトン関数 (7.60) がこの変換に対して不変であること、および無限小変換の母関数 (7.64) が保存量であることを確かめよ。

7.4.4 正準変換の不変量とリウビルの定理

正準変換をしても変わらない量を**正準不変量**という。特に、時間発展による変数の変化は正準変換なので、正準不変量は時間発展に対しても不変である。様々な正準不変量があるが、特にここでは、リウビルの定理に関連して、$2n$ 次元の位相空間内の任意の部分 Ω の体積

$$J_n \equiv \int \cdots \int_{\Omega} dq_1 \cdots dq_n \, dp_1 \cdots dp_n \tag{7.65}$$

[11] 式 (7.62) の最後の項は、K に定数項を与えるだけなので、なくても構わない。

を考える。これを時間発展に関してこれを述べると

（リウビルの定理）　位相空間の体積は時間発展に対して不変である。

となる。

証明：位相空間内の 1 点は系に含まれる全ての粒子の位置と運動量、即ち、 系の状態を一意的に指定する。系のある状態に対応する位相空間の点を**代表点**という。系の状態を表す代表点は運動方程式に従って移動するが、その軌跡はあたかも定常流の流体の流れを表す流線のように見える。位相空間内の各点で系の時間発展は一意的に決まっているため、流線は交わらない。

時間発展に対して体積が不変であるということを示すには、この流線が非圧縮性流体の定常流に対するものと同様に、湧き出しも吸い込みもないことを示せばよい。即ち、自由度が n の系の $2n$ 次元位相空間 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ における流速を表すベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ に対して、$2n$ 次元の発散がゼロ

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=0$$

を示せばよい。$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ は点 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ での速度を表すので、

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\equiv(\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{p}})$$

である。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}&=\sum_i\left(\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i}\right)\\&=\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0\end{aligned}$$

■

7.5　ポアソン括弧式の性質

第 7.3 節で定義したポアソンの括弧式 (7.15) には、様々な重要な性質がある。ポアソン括弧式は正準変数 (q,p) を用いて定義するので、それを明示する必要がある場合には

$$\{u,v\}_{q,p}\equiv\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)\tag{7.66}$$

と表すことにする。この定義から、以下の性質を直ちに示すことができる。u, v, w は (q,p) の関数とする。

1. **反対称性**

$$\{u,v\}=-\{v,u\}\tag{7.67}$$

2. 双線形性：2 つの変数どちらについても線形。即ち、 c_1, c_2 を定数として、

$$\begin{aligned} \{c_1 u + c_2 v,\ w\} &= c_1\{u,w\} + c_2\{v,w\} \\ \{w,\ c_1 u + c_2 v\} &= c_1\{w,u\} + c_2\{w,v\} \end{aligned} \tag{7.68}$$

3. ライプニッツ則

$$\begin{aligned} \{u\,v,\ w\} &= u\{v,w\} + \{u,w\}v \\ \{w,\ u\,v\} &= u\{w,v\} + \{w,u\}v \end{aligned} \tag{7.69}$$

4.

$$\{q_i, u\} = \frac{\partial u}{\partial p_i}, \qquad \{p_i, u\} = -\frac{\partial u}{\partial q_i} \tag{7.70}$$

5. ヤコビの恒等式

$$\{u,\{v,w\}\} + \{w,\{u,v\}\} + \{v,\{w,u\}\} = 0 \tag{7.71}$$

問題 7.24 これらの関係式を確かめよ。

7.5.1 ポアソンの定理

ヤコビの恒等式 (7.71) を用いると以下の定理を直ちに示すことができる。

ポアソンの定理：
$F(q,p,t)$ および $G(q,p,t)$ が保存量であれば $\{F,G\}$ も保存量

証明：(i) まず、F, G ともに t の陽な関数でない場合について証明する。ヤコビの恒等式 (7.71) より、

$$\{H,\{F,G\}\} + \{F,\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} = 0$$

一方、F と G が保存量なので (7.19) より

$$\{F,H\} = \{G,H\} = 0$$

だから、

$$\{H,\{F,G\}\} = 0$$

故に、$\{F,G\}$ は保存量。

(ii) F, G ともに t の陽な関数の場合には、$\{F,G\}$ に対して式 (7.18) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{F,G\} &= \{\{F,G\},H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} \\ &= -\{\{G,H\},F\} - \{\{H,F\},G\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} \\ &= \left\{F, \{G,H\} + \frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \left\{\{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} \\ &= \left\{F, \frac{dG}{dt}\right\} + \left\{\frac{dF}{dt}, G\right\} = 0 \end{aligned}$$

■

7.5.2　基本括弧式

ポアソン括弧式の定義 (7.66) から、直ちに

$$\{q_i, q_j\}_{q,p} = \{p_i, p_j\}_{q,p} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{i,j} \tag{7.72}$$

を示せる。これを**基本括弧式**という。これに関して次の命題が重要だ。

変数 (Q_i, P_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が、変数 (q_i, p_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の関数

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.73}$$

として与えられているとする[12]。

命題：変数 (q, p) から変数 (Q, P) への変換 (7.73) が正準変換であることの必要十分条件は、(q, p) で定義したポアソン括弧式に対して (Q, P) が基本括弧式

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{i,j} \tag{7.74}$$

を満たすことである。

一般の場合の証明は【付録】に譲り、ここでは 1 自由度 $n = 1$ の場合の証明を与える。この場合、基本括弧式 (7.74) のうち

$$\{Q, Q\}_{q,p} = \{P, P\}_{q,p} = 0$$

はポアソン括弧式の定義式 (7.66) より自明なので、

$$\{Q, P\}_{q,p} = 1 \tag{7.75}$$

についてのみ示せばよい。

以下の証明では、新変数 (Q, P) の旧変数 (q, p) による偏微分、および旧変数の新変数による偏微分は、それぞれ $Q(q, p)$, $P(q, p)$ および $q(Q, P)$, $p(Q, P)$ の偏微分を意味し、

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \equiv \frac{\partial Q(q, p)}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} \equiv \frac{\partial p(Q, P)}{\partial Q}, \quad \text{etc.}$$

のように略記する。

証明：(q, Q) を独立変数に取れる、すなわち、変換式 (7.73) が

$$p = \phi(q, Q), \qquad P = \psi(q, Q) \tag{7.76}$$

と変形できるとする[13]。正準変換の条件は、変換 (7.76) が母関数 $W_1(q, Q)$ を用いて

$$p = \frac{\partial W_1(q, Q)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial W_1(q, Q)}{\partial Q} \tag{7.77}$$

[12] 以下、変数変換の時間 t 依存性は特に役割を果たさないので、t 依存性を省略する。
[13] その他の場合にどうなるかは、各自考えてみよう。

と表せることである。微分順序の可換性より、関係式

$$\frac{\partial \phi}{\partial Q} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial Q\,\partial q} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial q\,\partial Q} = -\frac{\partial \psi}{\partial q} \tag{7.78}$$

が示される。逆に、この関係式が成り立っていれば、

$$dW_1(q,Q) = \phi(q,Q)dq - \psi(q,Q)dQ \tag{7.79}$$

が完全微分となり $W_1(q,Q)$ が存在する。即ち、式 (7.76) が正準変換である必要十分条件は式 (7.78) なので、証明すべきことは

式 (7.78)：母関数の存在条件　$\Leftrightarrow$　式 (7.75)：基本括弧式

であることが分かった。

- **基本括弧式を満たせば正準変換であること：式 (7.78) $\Leftarrow$ 式 (7.75)**

  まず、表式 (7.76) より $P = \psi(q, Q(q,p))$ なので、関係式

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial \psi}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p}, \qquad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial \psi}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} \tag{7.80}$$

  および、$p = \phi(q, Q(q,p))$ より、関係式

$$1 = \frac{dp}{dp} = \frac{\partial \phi}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} \tag{7.81}$$

  が成り立つ。これらを用いると括弧式 (7.75) の左辺は、

$$\begin{aligned} \{Q,P\}_{q,p} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} & &[\text{式 (7.80) を代入}] \\ &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial \psi}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial \psi}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\right) & & \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\frac{\partial \psi}{\partial Q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q} & &[\text{式 (7.81) を代入}] \\ &= -\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)^{-1}\frac{\partial \psi}{\partial q} & & \end{aligned} \tag{7.82}$$

  と変形できる。これが 1 に等しいことより

$$-\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)^{-1}\frac{\partial \psi}{\partial q} = 1,$$

  即ち、母関数の存在条件 (7.78) が得られる。

- **正準変換であれば基本括弧式を満たすこと：式 (7.78) $\Rightarrow$ 式 (7.75)**

  式 (7.82) を逆にたどれば、式 (7.78) より基本括弧式 (7.75) が成り立つことは直ちにわかる。

証明終

問題 7.25 スケール変換した変数 (7.30) は正準方程式 (7.22) を満たすが、ポアソンの基本括弧式 (7.74) は成り立たないことを確かめよ[14]。

[14] つまり、スケール変換した変数は正準<u>変数</u>だが、スケール変換は正準<u>変換</u>でない。

7.5.3 正準変換の不変量としてのポアソン括弧式

ポアソン括弧式は正準不変量である。即ち、変数 (q,p) から変数 (Q,P) への変換が正準変換であれば、(q,p) の任意の関数 (u,v) に対して、

$$\{u,v\}_{q,p} = \{u,v\}_{Q,P} \tag{7.83}$$

が成り立つ。

結局、ポアソン括弧式は正準変換して得られるどの変数で計算しても同じなので、単に

$$\{u,v\}$$

と書けばよい。

証明：添字の和についてはアインシュタインのルールを用いる。関数 v は、変数 $Q(q,p)$, $P(q,p)$ を通して (q,p) の関数とみなすと、$v\big(Q(q,p),P(q,p)\big)$ と表されるので、合成関数の微分則を用いて、

$$\begin{aligned}
\{u,v\}_{q,p} &= \frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k} \\
&= \frac{\partial u}{\partial q_k}\left(\frac{\partial v}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial p_k} + \frac{\partial v}{\partial P_\ell}\frac{\partial P_\ell}{\partial p_k}\right) - \frac{\partial u}{\partial p_k}\left(\frac{\partial v}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_k} + \frac{\partial v}{\partial P_\ell}\frac{\partial P_\ell}{\partial q_k}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial Q_\ell}\left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial Q_\ell}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial v}{\partial P_\ell}\left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial P_\ell}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial P_\ell}{\partial q_k}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial Q_\ell}\{u,Q_\ell\}_{q,p} + \frac{\partial v}{\partial P_\ell}\{u,P_\ell\}_{q,p}.
\end{aligned} \tag{7.84}$$

となる。この式に $u=Q_s$ を代入し、基本括弧式 (7.74) を用いて

$$\begin{aligned}
\{Q_s,v\}_{q,p} &= \frac{\partial v}{\partial Q_\ell}\{Q_s,Q_\ell\}_{q,p} + \frac{\partial v}{\partial P_\ell}\{Q_s,P_\ell\}_{q,p} \\
&= \frac{\partial v}{\partial P_\ell}\delta_{s,\ell} = \frac{\partial v}{\partial P_s}
\end{aligned} \tag{7.85}$$

を得る。同様に $u=P_s$ を代入して

$$\{P_s,v\}_{q,p} = -\frac{\partial v}{\partial Q_s} \tag{7.86}$$

を得る。これらの式で $v\to u$ と置き換えたものを、式 (7.84) に用いると、

$$\begin{aligned}
\{u,v\}_{q,p} &= +\frac{\partial v}{\partial Q_\ell}\Big(-\{Q_\ell,u\}_{q,p}\Big) + \frac{\partial v}{\partial P_\ell}\Big(-\{P_\ell,u\}_{q,p}\Big) \\
&= -\frac{\partial v}{\partial Q_\ell}\frac{\partial u}{\partial P_\ell} + \frac{\partial v}{\partial P_\ell}\frac{\partial u}{\partial Q_\ell} \\
&= -\{v,u\}_{Q,P} = \{u,v\}_{Q,P}
\end{aligned}$$

■

7.5.4 正準変換の合成と逆変換

上で示した、正準変換とポアソンの基本括弧式の等価性と、ポアソンの括弧式が正準不変量であること使えば、以下の 2 つの命題を容易に示すことができる。

命題：変換 $(q,p)\to(q',p')$ と変換 $(q',p')\to(q'',p'')$ がともに正準変換ならば、その合成変換 $(q,p)\to(q'',p'')$ も正準変換である。

証明：ポアソン括弧式は正準不変量であることから、任意の関数 $u(q',p')$, $v(q',p')$ に対して、

$$\{u,v\}_{q,p}=\{u,v\}_{q',p'}$$

が成り立つ。これより、

$$\{q''_i,p''_j\}_{q,p}=\{q''_i,p''_j\}_{q',p'}=\delta_{i,j},\quad \text{etc.}$$

となり、(q'',p'') は (q,p) で定義したポアソン括弧式に対して、基本括弧式を満たすことがわかる。

即ち、合成変換 $(q,p)\to(q'',p'')$ も正準変換である。　**証明終**

命題:変換 $(q,p)\to(q',p')$ が正準変換であれば、その逆変換 $(q',p')\to(q,p)$ も正準変換である。

証明：ポアソン括弧式は正準不変量であることから、任意の関数 $u(q',p')$, $v(q',p')$ に対して、

$$\{u,v\}_{q',p'}=\{u,v\}_{q,p}$$

が成り立つ。これより、

$$\{q_i,p_j\}_{q',p'}=\{q_i,p_j\}_{q,p}=\delta_{i,j},\quad \text{etc.}$$

となり、(q,p) は (q',p') で定義したポアソン括弧式に対して、基本括弧式を満たすことがわかる。

即ち、逆変換 $(q',p')\to(q,p)$ も正準変換である。　**証明終**

問題 7.26 「(q,p) が正準変数のとき $Q=Q(q,p,t)$, $P=P(q,p,t)$ は正準変数か」という問いに対して、A 君は「正準変数であれば基本括弧式を満たすので、変数 (Q,P) が基本括弧式を満たすかどうかを調べれば良い」と考えた。それに対して、B 君は「基本括弧式を満たせば正準変換なので、変数 (Q,P) が基本括弧式を満たすかどうか調べれば良い」と考えた。どちらの思考が論理的か？

問題 7.27 正準変換 $(q,p)\to(q',p')$ の母関数が $W_1^{(1)}(q,q')$、正準変換 $(q',p')\to(q'',p'')$ の母関数が $W_1^{(2)}(q',q'')$ で与えられるとき、合成変換 $(q,p)\to(q'',p'')$ の母関数 $W_1^{(3)}(q,q'')$ を求めよ。

問題 7.28 正準変換 $(q,p)\to(q',p')$ の母関数が $W_1(q,q')$ で与えられるとき、逆変換 $(q',p')\to(q,p)$ の母関数 $W_1^{\text{inv}}(q',q)$ を求めよ。

7.6 【付録】自由度 n の場合の正準変換と基本括弧式の等価性の証明

第 7.5.2 節で述べた「正準変換と基本括弧式の等価性」の証明を、一般の n の場合に与える。

命題： 変数の組 (q,p) から (Q,P) への変換

$$Q_i = Q_i(q,p,t), \qquad P_i = P_i(q,p,t); \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{7.87}$$

が与えられたとき、これが正準変換であることの必要十分条件は、変数 (q,p) で定義したポアソンの括弧式に対して変数 (Q,P) が基本括弧式

$$\{Q_i, P_j\}_{qp} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right) = \delta_{i,j} \tag{7.88}$$

$$\{Q_i, Q_j\}_{qp} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\right) = 0 \tag{7.89}$$

$$\{P_i, P_j\}_{qp} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right) = 0 \tag{7.90}$$

を満たすことである。

本文と同様に、変数変換 (7.87) は独立変数として (q,Q) を取れるとする。その場合、式 (7.87) は (p,P) について解いて

$$p_i = \phi_i(q,Q,t), \qquad P_i = \psi_i(q,Q,t); \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{7.91}$$

と書くことができる。これが正準変換であれば、変換の母関数 $W_1(q,Q,t)$ が存在して

$$p_i = \frac{\partial W_1(q,Q,t)}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial W_1(q,Q,t)}{\partial Q_i} \tag{7.92}$$

と表されるので、偏微分の順序を変えても等しいことから

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial \psi_j}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \psi_j}{\partial Q_i} \tag{7.93}$$

が成り立つ。逆に、これらの関係式が成立てば

$$dW_1(q,Q,t) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\phi_i(q,Q,t)dq_i - \psi_i(q,Q,t)dQ_i\Big) \tag{7.94}$$

は変数 (q,Q) に対して完全微分なので、各時刻 t に対して $W_1(q,Q,t)$ が存在し、変換 (7.92) は正準変換である。

以下の証明では行列表記を用いる。例えば ij 成分が $\dfrac{\partial Q_i}{\partial p_j}$ の行列を $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial p}\right)$ と表記し、成分の積の和は行列の積を用いて

$$\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial P_j}$$

のように表す。ここで、$[A]_{ij}$ は行列 A の ij 成分を表す。

この行列表記を用いると、正準変換の条件、すなわち $W_1(q,Q,t)$ が存在する条件 (7.93) は

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial Q}\right) = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^t, \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)^t, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial Q}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial Q}\right)^t \tag{7.95}$$

と表される。ここで A^t は行列 A の転置行列を表す。また、基本括弧式 (7.88)∼(7.90) は

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^t - \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^t = \hat{I}, \tag{7.96}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^t - \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^t = 0, \tag{7.97}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^t - \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^t = 0 \tag{7.98}$$

となる。つまり、証明すべき命題は、

式 (7.95)：正準変換の条件　$\Leftrightarrow$　式 (7.96)∼(7.98)：基本括弧式

である。

証明：

まず、式 (7.91) より $P_i(q,p,t) = \psi_i(q,Q(q,p),t)$ と表されるので、関係式

$$\frac{\partial P_j}{\partial p_k} = \frac{\partial\psi_j}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial p_k}, \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) \tag{7.99}$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_k} = \frac{\partial\psi_j}{\partial q_k} + \frac{\partial\psi_j}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_k}, \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right) \tag{7.100}$$

が成り立ち、$p_i(q,p,t) = \phi_i(q,Q(q,p),t)$ より、関係式

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \frac{\partial\phi_i}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial p_j} = \delta_{i,j}, \qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) = \hat{I} \tag{7.101}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial\phi_i}{\partial q_j} + \frac{\partial\phi_i}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_j} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right) = 0 \tag{7.102}$$

が成り立つ。同じ式を成分表示と行列表示の両方を示した。

基本括弧式が成り立てば正準変換であること: 式 (7.95) $\Leftarrow$ 式 (7.96)∼(7.98)

これらの関係式を用いて基本括弧式 (7.96)∼(7.98) を以下のように変形する。

- 式 (7.96) は、関係式 (7.99) と (7.100) および関係式 (7.101) を用いると、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^t-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^t \\
&=\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^t\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)^t-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)^t+\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^t\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)^t\right) \\
&=\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^t-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^t\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)^t-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)^t \\
&=\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^t-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^t\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)^t-\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)^t=\hat{I}
\end{aligned} \tag{7.103}$$

となる。

- 式 (7.97) は、関係式 (7.101) と (7.102) を用いると、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^t-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^t \\
&=-\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)^{-1}\right)^t+\Big(\text{1'st term}\Big)^t \\
&=-\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)^{-1}\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)^t\right)\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)^{-1}\right)^t=0
\end{aligned} \tag{7.104}$$

となる。

- 最後に、式 (7.98) は関係式 (7.99), (7.100) を用いると、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^t-\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^t \\
&=\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)+\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\right)^t-\Big(\text{1'st term}\Big)^t \\
&=\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)^t\right)^t\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)^t-\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)^t\right) \\
&\quad+\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)^t=0
\end{aligned} \tag{7.105}$$

となる。

式 (7.104) を式 (7.103) および式 (7.105) に代入し、更に式 (7.103) から得られる関係式を式 (7.105) に代入することにより、基本括弧式より

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial Q}\right)=-\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)^t,\quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)=\left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)^t,\quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)=\left(\frac{\partial \psi}{\partial Q}\right)^t \tag{7.106}$$

が得られる。これらは、まさに母関数 $W_1(q,Q)$ が存在するための条件 (7.95) である。

正準変換であれば基本括弧式が成り立つこと：式 (7.95) $\Rightarrow$ 式 (7.96)～(7.98)

逆に、関係式 (7.95) から式 (7.96)～(7.98) が導けることは、式 (7.103)～(7.105) から直ちに分かる。 証明終

第8章　ハミルトン・ヤコビの理論

前章で議論した正準変換の理論を用いると、新しいハミルトニアン K をゼロにする正準変換を求めることができる。その場合、正準方程式を解くこと自体は自明な問題になる。そのような正準変換を与える母関数の満たす方程式をハミルトン・ヤコビ方程式という。

8.1　循環座標

座標 q_c がラグランジュ関数 L に含まれないとき、それを循環座標、或いはサイクリック座標と呼び、その正準共役な運動量 p_c が保存することは、既に第 5 章で議論した。問題 7.6 で確かめたように、循環座標 q_c はハミルトニアン H にも含まれないので、共役運動量が保存することは正準方程式

$$\dot{p}_c = -\frac{\partial H}{\partial q_c} = 0$$

からもわかる。

ところで、系の循環座標の数は用いる座標系に依存することに、注意しよう。例えば、中心力場中の質点の場合、直角座標を用いると循環座標はないが、極座標では方位角 ϕ が循環座標になり、その共役運動量、即ち z 軸の周りの角運動量 p_ϕ が保存することが分かる。

全座標が循環座標の場合：　では、もとの変数から正準変換をして、

全ての座標が循環座標になるような正準変数

が得られたらどうなるだろうか？このような新しい正準変数 (Q, P) では、運動方程式を解くのは簡単だ。新しいハミルトニアン K は P のみの関数になるので、P_i に対する正準方程式はすぐ解けて

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K(P)}{\partial Q_i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_i = \alpha_i \quad \text{積分定数} \tag{8.1}$$

となる。一方、Q_i に対する方程式も、P_i の解 (8.1) を用いると

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K(P)}{\partial P_i} \equiv v_i(\alpha) \quad \text{定数} \qquad \Rightarrow \qquad Q_i = v_i(\alpha)t + \beta_i \tag{8.2}$$

と、直ちに解ける。ここで β_i も積分定数で、α_i とともに初期条件で決められる。

$K=0$ となる場合：　さらに過激な状況を考える。即ち、新しいハミルトニアン K に全ての Q が含まれないだけではなく全ての P も含まれず、

$$\underline{K=0\text{ となる}}\text{ような正準変数}$$

が得られたらどうなるだろうか？問題はもっと簡単だ。全ての運動量、座標の時間微分はゼロなので、

$$\begin{array}{l}\dot{P}_i=0\\ \dot{Q}_i=0\end{array}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{array}{l}P_i=\alpha_i\\ Q_i=\beta_i\end{array}\quad\text{定数}\tag{8.3}$$

即ち、全ての変数が定数となる。しかしこの場合には、より難しい問題は別にある。つまり問題は

$$K=0\text{ となる正準変換を見つけるにはどうしたらよいか}$$

ということだ。

8.2　ハミルトン・ヤコビ方程式

そのような正準変換があったとして、その母関数が満たす方程式を求めよう。運動方程式が、正準変数とハミルトニアン

$$(q_i,p_i),\qquad H(q,p,t)\tag{8.4}$$

で与えられているとする。これを、新しい正準変数 (Q_i,P_i) で記述する。新旧２組の正準変数の関係は、母関数 $W(q,P,t)\equiv W_2(q,P,t)$ によって

$$p_i=\frac{\partial W(q,P,t)}{\partial q_i},\qquad Q_i=\frac{\partial W(q,P,t)}{\partial P_i}.\tag{8.5}$$

と与えられるとする。その時、新しいハミルトニアンがゼロ、即ち

$$K=H(q,p,t)+\frac{\partial W(q,P,t)}{\partial t}=0\tag{8.6}$$

となるような母関数 W が満たす方程式は、どう与えられるだろうか。それは、K の表式 (8.6) に変換 (8.5) を代入した式

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q},t\right)+\frac{\partial W}{\partial t}=0\tag{8.7}$$

である。変換の母関数 $W(q,P,t)$ を**ハミルトンの主関数**、それが満たす偏微分方程式 (8.7) を**ハミルトン・ヤコビ方程式**と呼ぶ。

系の自由度を n とすると、偏微分方程式 (8.7) は n 個の座標 q と時間 t の $n+1$ 変数の一階の偏微分方程式である。その一般解は $n+1$ 個の積分定数を含むが、式 (8.7) は W の偏微分しか含まないので、積分定数の一つは付加定数で物理的意味はない。

W の q および t 依存性は方程式 (8.7) を解くことによって得られるが、この方程式には P が含まれていないので、新しい運動量をどう選ぶかには任意性があることに注意しよう。

8.2.1 解の一般形

式 (8.7) の解は、$n+1$ 個の積分変数を $\alpha_i (i=1,\cdots,n+1)$ とすると、形式的に

$$W(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t)+\alpha_{n+1} \tag{8.8}$$

と書ける。但し、物理的意味のない付加定数を α_{n+1} とし、W の外に書いた。

新しい正準運動量 P_i は時間変化しない定数なので、式 (8.8) に現れる任意の定数、即ち、積分定数あるいはその適当な組み合わせを新しい運動量とすることができる。そこで、単純に

$$P_i=\alpha_i\,;\qquad n=1,\cdots,n \tag{8.9}$$

とすると、(q,p) との変換式 (8.5) は

$$p_i=\frac{\partial}{\partial q_i}W(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t) \tag{8.10}$$

$$Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i}=\frac{\partial}{\partial \alpha_i}W(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t)=\beta_i \tag{8.11}$$

となる。式 (8.11) で、新しい正準座標 Q_i も定数となるべきことから、それを β_i と置いた。

$W(q,\alpha,t)$ が求まれば、式 (8.10) と (8.11) を (q,p) について解くことによって、もとの問題の解が与えられる。また、$2n$ 個の定数 (α,β) は、初期条件、即ち $t=0$ での (q,p) の値を式 (8.10) と (8.11) に代入した式によって決められる。

8.2.2 変数分離解

ハミルトン・ヤコビ方程式 (8.7) は座標 q と時間 t を変数とする偏微分方程式だが、そのうちハミルトニアン H に含まれない変数は、分離して解くことができる。

H が時間 t を含まない場合

ハミルトニアン H が時間に依存しない場合には、ハミルトン・ヤコビ方程式 (8.7) は

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=0 \tag{8.12}$$

となり、q と t を分離した変数分離解

$$W(q,t)=S(q)+\Theta(t) \tag{8.13}$$

が存在する。式 (8.13) を式 (8.12) に代入して、分離定数を E とすると、

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)=E \tag{8.14}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}=-E \quad\Rightarrow\quad \Theta=-Et+\text{定数} \tag{8.15}$$

を得る。関数 S は**ハミルトンの特性関数**と呼ばれている[1]。

式 (8.14) の解は、分離定数 E 以外に n 個の積分定数を含むが、W の場合と同様、そのうち一つは物理的に意味のない付加定数なので、残りの $n-1$ 個の積分定数を α_i $(n=2,\cdots,n)$ とおいて、

$$S(q_1,\cdots,q_n,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;E)+\alpha_1 \tag{8.16}$$

と書ける。すると、W は

$$W=-Et+S(q_1,\cdots,q_n,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;E)+\alpha_1 \tag{8.17}$$

となる。以前と同様、運動量 P_i を解 W に含まれる定数と対応付けるが、E を P_1 として

$$P_1=E, \qquad P_i=\alpha_i \quad (i=2,\cdots,n) \tag{8.18}$$

とする。すると、正準変換 (8.5) およびハミルトニアン (8.6) は

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{8.19}$$

$$Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Q_1 &= -t+\dfrac{\partial S}{\partial E}=\beta_1 \\ Q_i &= \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i \quad (i=2,\cdots,n) \end{cases} \tag{8.20}$$

$$K=H+\frac{\partial W}{\partial t}=0 \quad \Rightarrow \quad E=H(q,p) \tag{8.21}$$

となる。$2n$ 個の定数、E, α, β は初期条件からきまる定数だが、式 (8.21) から E は系のエネルギーで、式 (8.20) から β_1 は時間の原点を決める定数であることが分かる。また、式 (8.20) の第 2 式 $(i=2,\cdots,n)$ には t が含まれないので、これらから座標空間 q 内における軌道が与えられる。

問題 8.1 式 (8.12) および (8.13) より式 (8.14) および (8.15) を導け。

循環座標が存在する場合

例えば、q_n を循環座標とすると、ハミルトン・ヤコビ方程式 (8.12) にも q_n は現れないので、変数分離解

$$W(q,t)=S(q_1,\cdots,q_{n-1})+\Phi(q_n)-Et \tag{8.22}$$

が存在する。ただし、時間 t もハミルトン関数に含まれないとする。すると、ハミルトン・ヤコビ方程式は

$$H\left(q_1,\cdots,q_{n-1},\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_{n-1}},\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_n}\right)=E \tag{8.23}$$

[1]文献によっては、この S も W と同じハミルトンの主関数と呼ぶこともある。

となる。q_n は Φ にしか含まれないので、これが任意の q_n の値に対して成り立つためには、

$$H\Big(q_1, \cdots, q_{n-1}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_{n-1}},\ L\Big) = E \tag{8.24}$$

$$\frac{\partial \Phi(q_n)}{\partial q_n} = L \quad \Rightarrow \quad \Phi(q_n) = Lq_n + \text{定数} \tag{8.25}$$

でなければばならない。ただし、L は定数で、循環座標 q_n に正準共役な運動量 p_n の値となる。

問題 8.2 式 (8.22) および (8.23) より式 (8.24 および (8.25) を導け。

8.2.3 解が正準方程式を満たすこと

ハミルトン・ヤコビ方程式の解 $W(q, \alpha, t)$ から求めた (q, p) が、実際に正準方程式を満たすことを示そう。即ち、ハミルトン関数 $H(q, p, t)$ に対して、ハミルトン・ヤコビ方程式

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \tag{8.26}$$

の解 $W(q, \alpha, t)$ が得られた時、

$$p_i = \frac{\partial W(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \qquad \beta_i = \frac{\partial W(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{8.27}$$

から得られる (q, p) の時間変化が、正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{8.28}$$

満たすことを示したい。ここで、α_i は偏微分方程式 (8.26) の解 $W(q, \alpha, t)$ に含まれる積分定数で、付加定数でないものとする。また、β_i も任意の定数で、これら 2 組の定数の値は初期条件から決まる。

1 自由度の場合の証明：　まず、$n = 1$ の場合の証明を与える[2]。q の時間発展は式 (8.27) の第 2 式で与えられていることに注意して、この式を t で全微分する。α と β は定数なので時間依存しないが、右辺の時間依存性には、$q(t)$ を通した時間依存と、t に陽に依存している部分の 2 つからなるので、

$$0 = \dot{q}\,\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha} \tag{8.29}$$

となり、これから

$$\dot{q} = -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \alpha}\right)^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha} \tag{8.30}$$

[2]添字の $_i$ は省略する。

をえる。一方、ハミルトン・ヤコビ方程式 (8.26) の両辺を α で全微分すると、W の中の直接の α 依存性以外に、$H(q,p,t)$ の変数 $p=\partial W/\partial q$ の中の α 依存性もあるので、合成関数の微分則より、

$$\left.\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p}\right|_{p=\frac{\partial W}{\partial q}}\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\partial q}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\partial t}=0 \tag{8.31}$$

が得られる。これら 2 つの式 (8.30) と (8.31) から $\partial^2 W/\partial t\partial\alpha$ を消去すると、

$$\dot{q}=\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q\partial\alpha}\right)^{-1}\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\partial q}\left.\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p}\right|_{p=\frac{\partial W}{\partial q}}=\frac{\partial H}{\partial p} \tag{8.32}$$

を得る[3]。これは、ハミルトンの正準方程式 (8.28) の第 1 式である。

p についても同様である。まず、式 (8.27) の第 1 式を t で全微分した式

$$\dot{p}=\dot{q}\,\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial q} \tag{8.33}$$

に、ハミルトン・ヤコビ方程式 (8.26) を q で全微分した式

$$\frac{\partial H}{\partial q}+\left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{p=\frac{\partial W}{\partial q}}\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial q\partial t}=0 \tag{8.34}$$

を用いて $\partial^2 W/\partial t\partial q$ を消去して、

$$\dot{p}=\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}-\frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{\partial H}{\partial q} \tag{8.35}$$

をえる。ここで、式 (8.32) を用いた。これはハミルトンの正準方程式 (8.28) の第 2 式である。 ■

n 自由度の場合の証明： $n=1$ の場合と同様であるが、成分の和が現れる。具体的証明は章末の 8.4 節の付録に与える。

8.3 例題

ハミルトン–ヤコビの理論の例題をいくつか挙げる。

8.3.1 1 次元自由粒子

一次元自由粒子のハミルトニアンは

$$H=\frac{1}{2m}p_x^2$$

で与えられる。ハミルトン・ヤコビ方程式 (8.7) は

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2=0$$

[3] $\partial W/\partial q=p$ とした。

となる。これは t を含まないので、変数分離解

$$W(x,t) = \Theta(t) + S(x)$$

が存在する。実際、この解の形を代入すると

$$\dot{\Theta}(t) + \frac{1}{2m}\Big(S'(x)\Big)^2 = 0$$

を得る。第 1 項は t のみの関数、第 2 項は x のみの関数なので、これが任意の t と x に対して成り立つためにはそれぞれが定数でなければならない。その定数をそれぞれ E および $-E$ として、方程式を 2 つに分離して解くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\Big(S'(x)\Big)^2 = E \quad &\Rightarrow \quad S(x) = \pm\sqrt{2mE}\,x + \text{定数} \\ \dot{\Theta}(t) = -E \quad &\Rightarrow \quad \Theta(t) = -Et + \text{定数} \end{aligned}$$

となり、これらを合わせてハミルトンの主関数

$$W(x,t) = -Et \pm \sqrt{2mE}\,x + \text{定数}$$

を得る。

この解には 2 つの任意定数が含まれるが、付加定数には物理的意味はないので、分離定数 E を新しい正準運動量 P ととると、もとの変数との変換式 (8.19)∼(8.21) は

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = \pm\sqrt{2mE} \\ Q &= \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial E} = -t \pm \sqrt{\frac{m}{2E}}x = \beta \quad (\text{定数}) \\ K &= H + \frac{\partial W}{\partial t} = H - E = 0 \quad \Rightarrow \quad H = E \end{aligned}$$

となる。最後の式は系のエネルギーが E であることを示しており、第 2 式から

$$x = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}\,\Big(t + \beta\Big)$$

を得る。

8.3.2 放物運動

1 次元と 2 次元の場合に分けて、一様重力下での質点の運動を考える。

1 次元放物運動

鉛直方向上向きの座標軸を y 軸とすると、ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}p_y^2 + mgy$$

で与えられる。ハミルトン・ヤコビ方程式は

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + mgy + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

となる。これには変数 t が含まれないので、変数分離解

$$W(y,t) = S(y) + \Theta(t)$$

が存在する。上の場合と同様、これを代入して分離定数を E として

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + mgy = E$$
$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -E$$

をえる。これらの解は容易に求まり、

$$\Theta(t) = -Et + \text{定数}$$
$$S(y) = \mp\frac{2}{3}\frac{1}{mg}\sqrt{2m}\big(E - mgy\big)^{3/2} + \text{定数}$$

即ち、

$$W(y,t) = \mp\frac{2}{3}\frac{1}{mg}\sqrt{2m}\big(E - mgy\big)^{3/2} - Et + \text{定数}$$

を得る。分離定数 E を新しい運動量 P とすると、これより、

$$p_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \pm\sqrt{2m\big(E - mgy\big)}$$
$$Q = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial E} = \mp\frac{1}{g}\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - mgy} - t = \beta$$

となる。但し、β は Q の値で、定数。

第 1 式より、運動量 p_y と高さ y の関係

$$\frac{1}{2m}p_y^2 + mgy = E$$

が与えられ、これは力学的エネルギー保存則を表す。第 2 式より、時間の関数としての高さを与える式

$$y = -\frac{1}{2}g(t+\beta)^2 + \frac{E}{mg}$$

を得る。

２次元放物運動

x 軸を水平方向に取ると、ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}\big(p_x^2 + p_y^2\big) + mgy$$

で与えられる。主関数 W の満たすハミルトン・ヤコビ方程式は

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right)+mgy+\frac{\partial W}{\partial t}=0 \tag{8.36}$$

となる。

ハミルトニアン H には、時間 t と座標 x が含まれないので、ハミルトン・ヤコビ方程式には x と t についての変数分離解

$$W=-Et+\alpha x+S(y)$$

が存在する。但し、E と α は定数とする。これを式 (8.36) に代入した式

$$\frac{1}{2m}\left(\alpha^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)+mgy-E=0$$

より、

$$\frac{\partial S}{\partial y}=\pm\sqrt{2m\left(E-\frac{\alpha^2}{2m}-mgy\right)}$$

をえて、これより

$$W=-Et+\alpha x\pm\int dy\sqrt{2m\left(E-\frac{\alpha^2}{2m}-mgy\right)} \tag{8.37}$$

となる。ここで、定数 E と α を新しい運動量

$$P_1=E, \qquad P_2=\alpha$$

とすると、新しい座標は

$$\beta_1=Q_1=\frac{\partial W}{\partial P_1}=\frac{\partial W}{\partial E}=-t\pm\int dy\,\frac{m}{\sqrt{2m\left(E-\frac{\alpha^2}{2m}-mgy\right)}} \tag{8.38}$$

$$\beta_2=Q_2=\frac{\partial W}{\partial P_2}=\frac{\partial W}{\partial \alpha}=x\pm\int dy\,\frac{\alpha}{\sqrt{2m\left(E-\frac{\alpha^2}{2m}-mgy\right)}} \tag{8.39}$$

で与えられる。ここで β_1 と β_2 は新しい座標の値で定数。

これらの不定積分は容易に実行でき、第 1 式より y と t の関係式、第 2 式より x と y の関係式、即ち、軌跡が得られる：

$$y=h-\frac{1}{2}g\big(t+\beta_1\big)^2$$
$$y=h-\frac{1}{2}g\left(\frac{m}{\alpha}\big(x-\beta_2\big)\right)^2$$

ただし、

$$h\equiv\frac{1}{mg}\left(E-\frac{\alpha^2}{2m}\right)$$

で、不定積分の積分定数は β_i の値に吸収できるのでゼロとした。これらの結果より、定数 α は p_x であることが分かる。

8.3.3 調和振動子

一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \\ &= \frac{1}{2m}\big(p^2 + m^2\omega^2 q^2\big)\,; \qquad \omega \equiv \sqrt{k/m} \end{aligned}$$

と表され、ハミルトン・ヤコビ方程式は

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

となる。H は時間 t を含まないので変数分離解

$$W = S(q) + \Theta(t)$$

が存在し、

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = E \tag{8.40}$$

$$\Theta(t) = -Et$$

で与えられる。新しいハミルトニアン K がゼロという条件

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial E} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = E$$

より分離定数 E は系のエネルギーと分かる。

式 (8.40) より、特性関数 S は

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \quad \Rightarrow \quad S(q) = \pm\int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}\, dq$$

で与えられる。この積分をするのは容易だが、系の位相空間内での軌道を求めるためには、この不定積分を求める必要はない。変換式

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2m}\Big(p^2 + m^2\omega^2 q^2\Big) = E \\ Q &= \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} - t = \pm\int \frac{m}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}}\, dq - t = \beta \quad (\text{定数}) \end{aligned}$$

第 2 式の積分を実行することにより、

$$q = \pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\sin\big(\omega(t+\beta)\big)$$

および、それを第 1 式に代入して

$$p = \pm\sqrt{2mE}\cos\big(\omega(t+\beta)\big)$$

を得る。複合 $\pm$ は定数 β の取り方に吸収できる[4]。

[4] $\beta \to \beta + \pi/\omega$ とすれば、符号は反転する。

8.3.4 中心力場中の平面運動

中心力場中の平面運動を考える。極座標でハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r) \tag{8.41}$$

で与えられ、HJ 方程式は

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right) + V(r) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \tag{8.42}$$

となる。

ここで、ハミルトン関数には変数 θ と t が含まれないので、主関数 W からこれらの変数が変数分離できて

$$W = -Et + \ell\theta + S(r) \tag{8.43}$$

の形の解があることに注意する。ただし、E と ℓ は定数で、あとで分かるように、２つの保存量であるエネルギーと角運動量に、それぞれ対応する。これを HJ 方程式に代入した式

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) + V(r) = E \tag{8.44}$$

より、$S(r)$ の表式

$$S(r) = \pm \int dr \sqrt{2m\big(E - V(r)\big) - \ell^2/r^2} \tag{8.45}$$

を得る。

ここで、２つの定数 E と ℓ を新しい運動量とみなして

$$P_1 = E, \qquad P_2 = \ell$$

とすると、新しい座標は

$$Q_1 = \frac{\partial W}{\partial P_1} = \frac{\partial W}{\partial E}, \qquad Q_2 = \frac{\partial W}{\partial P_2} = \frac{\partial W}{\partial \ell}$$

で与えられ、これらも定数なので、$Q_i = \beta_i$ として

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial E}, \qquad \beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \ell}$$

をえる。これから、

$$\beta_1 = -t \pm \int dr \frac{m}{\sqrt{2m\big(E - V(r)\big) - \ell^2/r^2}} \tag{8.46}$$

$$\beta_2 = \theta \pm \int dr \frac{\ell/r^2}{\sqrt{2m\big(E - V(r)\big) - \ell^2/r^2}} \tag{8.47}$$

を得る。第 1 式から r と t の関係式、第 2 式から r と θ の関係式、即ち、軌道が得られる。

ケプラー問題:　ポテンシャルを

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

とすると、逆 2 乗則に従う力の場の下での運動、即ちケプラー問題となる。この場合、式 (8.47) は、積分変数を $u = 1/r$ と変換することにより

$$\begin{aligned}\theta - \beta_2 &= \mp \int du \frac{1}{\sqrt{\big(2m/\ell^2\big)\big(E + ku\big) - u^2}}; \quad u \equiv \frac{1}{r} \\ &= \pm \cos^{-1}\left(\frac{\ell^2/\big(mk\,r\big) - 1}{\sqrt{1 + 2\ell^2 E/(mk^2)}}\right)\end{aligned}$$

と積分できる。これより、軌道の式

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2}\Big(1 \pm \epsilon \cos\big(\theta - \theta_0\big)\Big); \quad \epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{mk^2}} \tag{8.48}$$

をえる。ただし、$\theta_0 \equiv \beta_2$ とした。この式はよく知られているように

$$\begin{aligned}\epsilon > 1 &\quad \text{双曲線} \quad (E > 0) \\ \epsilon = 1 &\quad \text{放物線} \quad (E = 0) \\ 0 < \epsilon < 1 &\quad \text{楕円} \quad \big(-mk^2/2\ell^2 < E < 0\big) \\ \epsilon = 0 &\quad \text{円} \quad \big(E = -mk^2/2\ell^2\big)\end{aligned}$$

を表す。

8.4　【付録】n 自由度の場合の証明

n 自由度の場合について、ハミルトン・ヤコビ方程式の解が、実際にハミルトンの正準方程式を満たすことを証明する。ここではアインシュタインのルールを用いて、２つ重なった添え字については和を取るものとして、和の記号 $\sum$ を省略する。

まず、式 (8.27) の第 2 式を t および β_j で微分した式を求める：

$$0 = \dot{q}_j \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_i} \tag{8.49}$$

$$\delta_{ji} = \frac{\partial q_\ell}{\partial \beta_j} \frac{\partial^2 W}{\partial q_\ell \partial \alpha_i} \tag{8.50}$$

第 2 式 (8.50) は、２つの行列

$$A_{ij} \equiv \frac{\partial q_j}{\partial \beta_i}, \qquad B_{ij} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j} \tag{8.51}$$

が互いに逆行列 $\hat{A} = \hat{B}^{-1}$ であることを示しているので

$$\hat{A}\,\hat{B} = \hat{B}\,\hat{A} = \hat{I} \qquad \text{単位行列} \tag{8.52}$$

が成り立つ。これを成分で書くと、

$$\frac{\partial q_\ell}{\partial \beta_i}\frac{\partial^2 W}{\partial q_\ell \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_\ell}\frac{\partial q_j}{\partial \beta_\ell} = \delta_{ij} \tag{8.53}$$

となる。この関係を用いて、式 (8.49) に右から行列 $\hat{A}$ をかけると

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\dot{q}_j \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_i}\right)\frac{\partial q_k}{\partial \beta_i} \\ &= \dot{q}_j \delta_{jk} + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_i}\frac{\partial q_k}{\partial \beta_i} \end{aligned}$$

となり、

$$\dot{q}_k = -\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_i}\frac{\partial q_k}{\partial \beta_i} \tag{8.54}$$

を得る。これに、ハミルトン・ヤコビ方程式 (8.26) を α_i で微分した式

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial t} = 0 \tag{8.55}$$

を用いると

$$\dot{q}_k = \frac{\partial q_k}{\partial \beta_i}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} = \delta_{kj}\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{8.56}$$

をえる。但し、式 (8.53) の第 1 式を用いた。

一方、p の方程式は、式 (8.27) の第 1 式を t で微分した式

$$\dot{p}_\ell = \dot{q}_i \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_\ell} + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial q_\ell} \tag{8.57}$$

に、ハミルトン・ヤコビ方程式 (8.26) を q_ℓ で微分した式

$$\frac{\partial H}{\partial q_\ell} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_\ell \partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_\ell \partial t} = 0 \tag{8.58}$$

を代入して

$$\begin{aligned} \dot{p}_\ell &= \dot{q}_i \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_\ell} - \left(\frac{\partial H}{\partial q_\ell} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_\ell \partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \\ &= \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_\ell} - \frac{\partial H}{\partial q_\ell} = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \end{aligned} \tag{8.59}$$

となり、求まった。 ■

第 A 章　付録：速度に依存する力

本文では、力はポテンシャルで表され、ポテンシャルは粒子の座標のみに依存する場合を扱った。しかし、系に働く力が速度に依存する場合がある。ここでは代表的な例として、荷電粒子に働く磁場からの力（ローレンツ力）と、速度に比例した抵抗力を取り上げる。

A.1　電磁場中の荷電粒子

荷電粒子は電磁場中で電場と磁場から力を受け、運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{E} + q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} \tag{A.1}$$

と表される。右辺第二項が速度に依存するローレンツ力である。電磁場は、時間変化する場合、

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{A.3}$$

と、スカラーポテンシャル Φ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて表される。式 (A.2) の右辺第二項は、$\boldsymbol{B}$ の時間変化によって引き起こされる電場、即ちファラデーの電磁誘導を表す。

A.1.1　荷電粒子のラグランジュ関数

運動方程式 (A.1) は、ラグランジュ関数を

$$L = \frac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\big(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} - \Phi\big) \tag{A.4}$$

ととることによって、オイラー・ラグランジュ方程式によって表される。

証明：アインシュタインの規則を用いて、２つ重なっている添字については和を取る。

ラグランジュ関数 (A.4) より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} &= \frac{d}{dt}\left(m\,\dot{x}_j + qA_j\right) = m\,\ddot{x}_j + q\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial A_j}{\partial t}\right) \\
\frac{\partial L}{\partial x_j} &= q\left(\dot{x}_i\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}$$

なので、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$m\ddot{x}_j = q\left(\dot{x}_i\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t}\right) \tag{A.5}$$

で与えられる。これは、式 (A.2) および (A.3) を用いて、運動方程式 (A.1) に一致することを示せる。 ■

運動方程式がオイラー・ラグランジュ方程式で表されるので、3.2 節の議論から、電磁場による荷電粒子の運動もハミルトンの原理で表される、即ち、作用積分

$$I[\boldsymbol{r}] = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{A.6}$$

を停留にする軌道になっていることが分かる。

正準運動量は

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\,\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A} \tag{A.7}$$

となり、$m\dot{\boldsymbol{r}}$ とは異なることに注意。また、ハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2m}\big(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\big)^2 + \Phi \tag{A.8}$$

となる。

問題 A.1 式 (A.5) が式 (A.1) に一致することを確かめよ。

問題 A.2 この系のハミルトン関数 H が式 (A.8) で与えられることを示せ。

A.1.2 ゲージ不変性

スカラーポテンシャルおよびベクトルポテンシャルには不定性があり、任意の関数 Λ を用いて、いわゆるゲージ変換

$$\begin{cases} \Phi \\ \boldsymbol{A} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \Phi' = \Phi - \dfrac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\Lambda \end{cases} \tag{A.9}$$

をしても、式 (A.2) および (A.3) で表される電磁場は変化しない。ポテンシャルのゲージ変換に伴い、ラグランジュ関数は

$$\begin{aligned} L \quad \to \quad L' &= \frac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\big(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}' - \Phi'\big) \\ &= L + q\left(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\operatorname{grad}\Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) \\ &= L + q\frac{d\Lambda}{dt} \end{aligned} \tag{A.10}$$

と変換される。このラグランジュ関数の変換式 (A.10) は、次の 2 つのことを意味する。

質点の運動方程式はゲージ変換で不変：　このことは、ゲージ変換で電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が変わらないので当然であるが、ゲージ変換によるラグランジュ関数の変化が時間の全微分 $d\Lambda/dt$ で与えられるということからも分かる。即ち、作用積分の変分がゲージ変換に対して不変

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + q\frac{d\Lambda}{dt} \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{A.11}$$

なので、ハミルトンの原理から導かれるオイラー・ラグランジュの方程式もゲージ変換に対して不変である。

ゲージ変換の共変性：　逆に式 (A.10) をラグランジュ関数のゲージ変換を定義する式と見なそう。即ち、ラグランジュ関数も含めたゲージ変換を

$$\begin{cases} \Phi \\ \boldsymbol{A} \\ L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Phi' = \Phi - \dfrac{\partial \Gamma}{\partial t} \\ \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\, \Gamma \\ L' = L + q\dfrac{d\Gamma}{dt} \end{cases} \tag{A.12}$$

と定義する。すると式 (A.10) は L' を Φ' と $\boldsymbol{A}'$ で表すと L と同じ形になる、

$$L' = \frac{1}{2} m\, \dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\big(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}' - \Phi'\big) \tag{A.13}$$

ということを示している。このことを、ラグランジュ関数はゲージ変換に対して共変であるという。

A.2　速度に比例した抵抗力

抵抗力 $\boldsymbol{F}_r$ が速度に比例している場合

$$\boldsymbol{F}_r = -k\, \boldsymbol{v} \tag{A.14}$$

を考える。但し、k は抵抗係数で定数とする。粘性流体中をゆっくりと運動する物体には、このような抵抗力が働く。

レイリーの散逸関数：　抵抗力 $\boldsymbol{F}_r$ 以外の力はポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ で表されるとすると、運動方程式は

$$m\, \ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\nabla} U + \boldsymbol{F}_r \tag{A.15}$$

で与えられる。抵抗力はポテンシャルでは表されない。しかし、式 (A.14) のような速度に比例した抵抗力の場合には、速度の関数 R を

$$R \equiv \frac{1}{2} k\, \boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2} k\, \dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{A.16}$$

と定義すると

$$\boldsymbol{F}_r = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} \tag{A.17}$$

と表されるので、運動方程式 (A.15) は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}, \qquad \big(\boldsymbol{r} \equiv (x_1, x_2, x_3)\big) \tag{A.18}$$

と書ける。但し、ここで L はラグランジュ関数

$$L = \frac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}) \tag{A.19}$$

である。式 (A.16) で定義される関数 R を**レイリーの散逸関数**と呼ぶ。

散逸関数の物理的意味： 抵抗力 $\boldsymbol{F}_r$ を通して、系が外部にする仕事 W は

$$dW = -\boldsymbol{F}_r \cdot d\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{F}_r \cdot \boldsymbol{v}\,dt = kv^2 dt = 2R\,dt$$

と与えられる。即ち、単位時間当たりのエネルギー散逸は $2R$ で与えられる。

一般化座標： 一般化座標

$$q_j = q_j(x,t), \quad 或いは \quad x_i = x_i(q,t) \tag{A.20}$$

で系を表したとする。すると、運動方程式 (A.18) は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \tag{A.21}$$

となる。但し、Q_j は抵抗力 (A.14) による一般化力で

$$Q_j = F_{r,i}\,\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}\,\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{A.22}$$

で与えられる。ここで、

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

に注意すると

$$Q_j = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}\,\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$$

なので、式 (A.21) は一般化座標 q を用いて

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \tag{A.23}$$

と表され、式 (A.18) と同じ形になる。

問題 A.3 ハミルトン関数を $H = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - L$ として、L が時間に陽に依らない場合には、

$$\frac{dH}{dt} = -2R$$

となることを示せ。ただし、一般に R は $\dot{\boldsymbol{r}}$ の 2 次形式である。

第B章　付録：床を転がるコイン

本文の第 1.6.2 節および第 4.4.2 節で、非ホロノミック束縛条件の下での剛体運動の例として、床を転がるコインの運動を取り上げ、運動方程式

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} \tag{B.1}$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{I}\cdot\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{R} \tag{B.2}$$

と、非ホロノミック束縛条件

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c} \tag{B.3}$$

をえた。運動を記述する座標系として

座標系 xyz： $x-z$ 平面を床面、y 軸を鉛直上向きとする空間に固定された座標系。基底ベクトル $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$.

座標系 XYZ： コインの中心を原点とし、水平方向に X 軸、y 軸をコイン面に射影した方向に Y 軸、コイン面に垂直な方向を Z 軸とする座標系。基底ベクトル $(\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y, \boldsymbol{e}_Z)$.

を導入し、コインの向きは 3 つの角度

θ**：** y 軸に対して Y 軸の X 軸まわりの回転角。

ϕ**：** x 軸に対して X 軸の y 軸まわりの回転角。

ψ**：** Z 軸まわりの回転角。

で記述される。XYZ 系で慣性モーメントテンソル $\hat{I}$ は対角行列

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}Ma^2, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4}Ma^2, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}Ma^2 \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

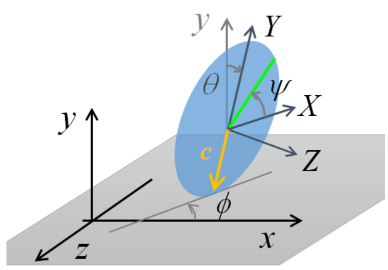

図 B.1: 床を転がるコイン

で、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_X + \dot{\phi}\boldsymbol{e}_y + \dot{\psi}\boldsymbol{e}_Z \\ &= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_X + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_Y + \left(\dot{\psi} - \dot{\phi}\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_Z \end{aligned} \tag{B.5}$$

で与えられる。

B.1 運動方程式の解法

ここでは、これらの方程式を実際に解く手順を与えよう。まず、座標系 XYZ は回転角速度ベクトル

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_X + \dot{\phi}\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{\omega} - \dot{\psi}\boldsymbol{e}_Y \tag{B.6}$$

で回転しているので、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ の座標系 XYZ における時間変化率を

$$\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)_{XYZ} \equiv \frac{du_X}{dt}\boldsymbol{e}_X + \frac{du_Y}{dt}\boldsymbol{e}_Y + \frac{du_Z}{dt}\boldsymbol{e}_Z \tag{B.7}$$

と定義すると、$\boldsymbol{u}$ の時間微分は

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)_{XYZ} + \ \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u} \tag{B.8}$$

と表される。これらを用いると、式 (B.1) と (B.2) は

$$M\left(\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)_{XYZ} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}\right) = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} \tag{B.9}$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{XYZ} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{R} \tag{B.10}$$

とかける。ただし、$\boldsymbol{L}$ は重心周りの角運動量で

$$\boldsymbol{L} = \hat{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{B.11}$$

と与えられる。

式 (B.9) と (B.10) から $\boldsymbol{R}$ を消去し、式 (B.3) と (B.11) を用いると

$$\begin{aligned}&\hat{I} \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\hat{I} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) \\ &\quad = -Ma^2\boldsymbol{e}_Y \times \left(\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \times \boldsymbol{e}_Y + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_Y\right) + \frac{g}{a}\boldsymbol{e}_y\right)\end{aligned} \tag{B.12}$$

をえる。ここで、$\boldsymbol{c} = -a\boldsymbol{e}_Y$ および $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$ を用いた。さらに、式 (B.6) を用いて $\boldsymbol{\Omega}$ を消去して、$\boldsymbol{\omega} = (\omega_X, \omega_Y, \omega_Z)$ についての方程式

$$\left(I_X + Ma^2\right)\frac{d\omega_X}{dt} = -\left(I_Z + Ma^2\right)\omega_Y\omega_Z - I_X\omega_Y^2\tan\theta + Ma^2\frac{g}{a}\sin\theta \tag{B.13}$$

$$I_X\frac{d\omega_Y}{dt} = +I_X\omega_X\omega_Y\tan\theta + I_Z\omega_Z\omega_X \tag{B.14}$$

$$\left(I_Z + Ma^2\right)\frac{d\omega_Z}{dt} = +Ma^2\omega_X\omega_Y \tag{B.15}$$

を得る。これらと、式 (B.5) を $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ について解いた

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_X \tag{B.16}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\cos\theta}\,\omega_Y \tag{B.17}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_Z + \tan\theta\,\omega_Y \tag{B.18}$$

で、方程式は閉じる。

この転がるコインの運動方程式を数値的に解くウェブシミュレータを

http://hnakanishi.cloudfree.jp/ThreeJS/Rolling_Coin/Rolling_Coin.html

に置いておく。

B.2 運動方程式 (1.68) と (4.62) の等価性:

式 (1.67) と (4.61) の等価性は容易に示されるので、式 (1.68) と (4.62) の等価性を以下で示す。

以下では、式 (4.62) がこの式 (B.10) と等価であることを示す。

まず、$\partial L/\partial\dot{\alpha}$ は、角速度 $\dot{\alpha}$ の回転軸方向の角運動量を与えるので、

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = L_X, \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = L_y = L_Y\cos\theta - L_Z\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = L_Z \tag{B.19}$$

である。また、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{\theta}} = \boldsymbol{e}_X, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{\phi}} = \boldsymbol{e}_y, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{\psi}} = \boldsymbol{e}_Z \tag{B.20}$$

なので、式 (4.62) は

$$\frac{dL_X}{dt} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \big(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{R}\big)\cdot\boldsymbol{e}_X \tag{B.21}$$

$$\frac{dL_y}{dt} = \big(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{R}\big)\cdot\boldsymbol{e}_y \tag{B.22}$$

$$\frac{dL_Z}{dt} = \big(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{R}\big)\cdot\boldsymbol{e}_Z \tag{B.23}$$

となる。ここで、L が ϕ および ψ に依存しないことを用いた。

θ の方程式 (B.21):

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{\partial L}{\partial\omega_Y}\frac{\partial\omega_Y}{\partial\theta} + \frac{\partial L}{\partial\omega_Z}\frac{\partial\omega_Z}{\partial\theta} = -L_Y\dot{\phi}\sin\theta - L_Z\dot{\phi}\cos\theta \;= -\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L}\big|_X$$

より、式 (B.21) は式 (B.10) の X 成分であることがわかる。

ψ の方程式 (B.23):

$$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L}\big|_Z = \dot{\theta}L_Y - \dot{\phi}\cos\theta L_X \;= \dot{\theta}I_X\omega_Y - \dot{\phi}\cos\theta I_X\omega_X \;= 0$$

なので、やはり式 (B.23) は式 (B.10) の Z 成分であることがわかる。

ϕ の方程式 (B.22):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L_y &= \frac{d}{dt}\big(L_Y\cos\theta - L_Z\sin\theta\big) \\
&= \frac{dL_Y}{dt}\cos\theta - \frac{dL_Z}{dt}\sin\theta - \dot{\theta}\big(L_Y\sin\theta + L_Z\cos\theta\big) \\
-\big(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{R}\big)\cdot\boldsymbol{e}_Z\sin\theta &= \frac{dL_Y}{dt}\cos\theta - \big(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{R}\big)\cdot\boldsymbol{e}_Z\sin\theta - \dot{\theta}\big(L_Y\sin\theta + L_Z\cos\theta\big) \\
\frac{dL_Y}{dt} &= \dot{\theta}\big(L_Y\tan\theta + L_Z\big) \ = \omega_X I_Y \omega_Y\tan\theta + \Omega_X L_Z \\
&= -L_X\Omega_Z + \Omega_X L_Z \qquad \because\ I_X = I_Y \\
&= -\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L}\big|_Y
\end{aligned}$$