物理的実在に対する量子力学の記述は完全とみなせるか？[*]

A. Einstein, P. Podolsky, and N. Rosen
Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey
(Dated: 1935 年 3 月 受理)

完全な理論においては、実在の各要素に対してそれに対応する要素がなければならない。ある物理量が実在するということに対する十分条件は、系を乱すことなくそれを確実に予言できることである。一方、量子力学においては、可換でない演算子で記述される２つの物理量の場合、一方の情報が他方の情報を排除してしまう。このことから、(1) 量子力学の波動関数による実在の記述は不完全であるか、または、(2) これらの２つの物理量は同時に実在できないかの、どちらかでなければならない。過去に相互作用していた２つの系について、一方の系にされた測定に基づき他方の系についての予言をするという問題を検討した結果、もし (1) が正しくなければ (2) もまた正しくないという結果が導かれた。これより (1) が正しい、すなわち、波動関数による物理的実在の記述は完全であり得ないと結論する。

1.

物理の理論について真剣に考察するのであれば、あらゆる理論からも独立に存在する客観的実在と、その理論が扱う物理概念とを区別しなければならない。物理概念は客観的実在に対応するべきものであり、我々はその概念を用いて実在を描写する。

物理理論の当否を判断するために、次の２つの質問をすることができる：(1) “その理論は正しいか？”、(2) “その理論による記述は完全か？”。この２つの質問両方に対して肯定的な答えが得られる場合に限って、その理論が用いる概念は満足すべきものと言えるだろう。理論の正しさは、理論の導く結果と我々の経験がどの程度整合するかによって判定される。我々は経験によってしか実在を推定できないが、物理において経験とは実験と測定によってなされる。この論文では、２番目の質問を量子力学に対して検討する。

完全という語がどんな意味を持つべきかはともかく、完全な理論は次のような条件を満たす必要はあるだろう：**物理的実在のすべての要素に対して、物理理論にその対応物がなければならない。**これを完全性の条件と呼ぼう。物理的実在の要素が何であるか決定できれば、２番目の質問に対して直ちに答えることができる。

物理的実在の要素は、哲学的考察によって先験的に決定できるものではない。実験と測定によって見出されるべきものだ。ここでの議論には実在についての包括的な定義は必要ない。以下の判定基準がもっともらしく、またそれで十分であろう。**もし、系を全く乱すことなく、ある物理量の値を確実に（確率１で）予言することができるのであれば、その物理量に対応する物理的実在の要素は存在する。**この判定基準が物理的実在を認識する可能な方法をすべて尽くしているとは言い難いが、状況が設定されている場合にはいつでも、そのような方法を少なくとも一つは提供してくれるように思う。これは実在性に対する必要条件ではなく単に十分条件でしかないが、この判定基準は量子力学にかぎらず、古典力学における実在性の概念とも整合している。

説明のために、１自由度の粒子の量子力学的記述を考えよう。理論における基本的概念は**状態**で、それは波動関数 ψ で完全に特徴づけられると仮定されている。また、波動関数はその粒子を記述するのに選ばれた変数の関数として与えられる。物理的に観測可能な量全てに対してそれぞれ対応する演算子が存在する。観測可能量と対応する演算子を同じ記号 A で表そう。

波動関数 ψ が演算子 A の固有関数であったとする。すなわち、a を数として、粒子の状態を表す ψ が

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \tag{1}$$

を満たしたとすれば、物理量 A は確実に a という値を取る。我々の実在性の判定基準に照らして、式 (1) を満たす ψ の状態にある粒子に対して、物理量 A に対して対応す

---

[*] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935). “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”. 日本語翻訳：中西　秀

る物理的実在の要素が存在する。例として、波動関数

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x} \tag{2}$$

を考えよう。ここで、h はプランク定数、p_0 はある定数、x は独立変数である。粒子の運動量に対応する演算子は

$$p = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

で与えられるので、

$$\psi' = p\psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial x} = p_0\psi \tag{4}$$

である。つまり、式 (2) で与えられる状態にある時、運動量の値は確実に p_0 である。すなわち、式 (2) の状態にある粒子の運動量は実在するということを意味している。

他方、もし式 (1) が成り立たなければ、物理量 A はもはや特定の値を取るとはいえない。粒子の座標がこの例である。座標に対応する演算子を q とすると、これは独立変数 x を掛けるという演算なので、

$$q\psi = x\psi \neq a\psi \tag{5}$$

となる。量子力学によると、この場合は測定結果として相対確率しか得られず、座標が a と b の間にある確率は

$$P(a,b) = \int_a^b \overline{\psi}\psi\, dx = \int_a^b dx = b - a \tag{6}$$

に比例する。この確率は a にかかわらず間隔 $b-a$ のみに依るので、座標はすべての値を等しい確率で取るということが分かる。

式 (2) の状態にある粒子に対して座標の値を確実に予想することはできない。座標を得るには直接測定するしかない。しかし、そのような測定は粒子を撹乱し、その状態を変えてしまう。座標を決定した後は、粒子はもはや式 (2) の状態にはいないのである。このことから導かれる量子力学における通常の結論は、**粒子の運動量が決まっている時、粒子の座標には物理的実在性はない**ということである。

より一般的には、量子力学において２つの物理量 A と B に対応する演算子が可換でなければ、すなわち、$AB \neq BA$ であれば、一方の物理量の正確な情報はもう一方の物理量の正確な情報を不可能にする。そして更に、後者の値を決定しようとする実験的な試みは全て、系の状態を撹乱し前者の情報を損なってしまう。

これから以下のどちらかが導かれる：(1) **波動関数による量子力学の実在の記述は完全ではない**、または、(2) **２つの物理量に対応する演算子が可換でないとき、その２つの量は同時に実在性を持ちえない。**というのは、もし上の (1) と (2) のどちらも成り立たないとすると、非可換な物理量の両方が同時に実在性 — すなわち確定した値 — を持ち、かつ量子力学の記述が完全でなければならない。完全性の条件によって波動関数は非可換な物理量の両方の値を含み、それらの物理量が予言可能であるはずである。しかし、実際にはそうではないので、上のように結論するほかない。

通常量子力学では、波動関数が、それに対応する状態にある系の物理的実在を完全に記述して**いる**と仮定されている。一見、この仮定は全く合理的だ。というのは、波動関数から得られる情報は、系の状態を乱さずに測定できる物理量と正確に対応しているように見えるからだ。しかし、すでに述べた実在性の判定基準を用いると、この仮定は矛盾を導くことを以下で示す。

2.

このことを示すために、２つの系 I と II を考えよう。この２つの系は時刻 $t=0$ から $t=T$ まで相互作用し、その後は、２つ系の間には何の相互作用もないとする。更に、時刻 $t=0$ 以前の２つの系の状態は分かっていて、シュレディンガー方程式を用いて、それ以降、特に $t>T$ の合成系 I+II の状態が計算できるとする。この合成系の波動関数を Ψ としよう。一方、２つの系が相互作用した後には、系 I または系 II がどんな状態にあるのかを計算することはできない。量子力学によると、そのためには観測が必要で、その結果**波束の収縮**として知られている過程が起こる。この過程の要点を検討しよう。

系 I のある物理量 A を表す演算子の固有値を $a_1, a_2, a_3, \cdots$ とし、対応する固有関数を $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \cdots$ とする。ここで、x_1 は系 I を記述する変数である。すると、Ψ を x_1 の関数とみなして

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \tag{7}$$

と展開できる。ここで、x_2 は系 II を記述する変数で、

$\psi_n(x_2)$ は、Ψ を直交関数系 $u_n(x_1)$ で展開した時の、単なる展開係数である。さてここで、物理量 A を測定してその結果その値が a_k であったとしよう。すると測定の後、系 I は波動関数 $u_k(x_1)$ の状態、系 II は波動関数 $\psi_k(x_2)$ の状態にあると結論付けられる。これが波束の収縮の過程である。無限級数 (7) で与えられる波束が、たった一つの項 $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$ に収縮するのである。

関数系 $u_n(x_1)$ は物理量 A をどう選ぶかで決まっている。もし、別の物理量 B を選んだとする。その固有値が b_1, b_2, b_3, $\cdots$ で、　固有関数が $v_1(x_1)$, $v_2(x_1)$, $v_3(x_1)$, $\cdots$ とすると、Ψ の展開は式 (7) ではなく

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1) \tag{8}$$

となったはずだ。ここで、$\varphi_s(x_2)$ は新しい展開係数である。もし物理量 B が測定され、その値が b_r であったとすると、測定後に系 I は状態 $v_r(x_1)$、系 II は状態 $\varphi_r(x_2)$ にあると結論づけられる。

というわけで、系 I にした２つの異なる測定の結果、系 II が異なる波動関数の状態になるということが分かる。一方、測定がなされたときには２つの系はすでに相互作用していないので、系 I に何がされようとも系 II に何らかの変化が実際に起こるわけではない。これはもちろん、２つの系の間に相互作用がないということを、単に言い換えただけである。つまり、**全く同じ実在**（系 I と相互作用し終えた後の系 II）**に対して２つの異なる関数**（ψ_k と φ_r）**を関連付けることが可能である** ということだ。

さて、２つの波動関数 ψ_k と φ_r が、ある物理量に対応する２つの可換でない演算子 P と Q の固有関数であったとしよう。こんなことが実際にありうるかは、例で示すのが一番良い。２つの系はそれぞれ１粒子からなるとし、波動関数は

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p}\, dp \tag{9}$$

で与えられるとする。ここで、x_0 はある定数である。A を系 I の粒子の運動量としよう。すると、式 (4) で見たように、固有値 p に対する固有関数は

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1} \tag{10}$$

である。今の場合、固有値スペクトルが連続なので、式 (7) は

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1)\, dp \tag{11}$$

および

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p} \tag{12}$$

で表される。この ψ_p は系 II の粒子の運動量を表す演算子

$$P = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{13}$$

の固有関数で、対応する固有値は $-p$ である。一方、もし B として系 I の粒子の座標を取ると、固有値 x に対する固有関数は

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \tag{14}$$

で与えられる。ここで、$\delta(x_1 - x)$ はよく知られたディラックのデルタ関数である。この場合、式 (8) は

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1)\, dx \tag{15}$$

と

$$\begin{aligned} \varphi_x(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p}\, dp \\ &= h\delta(x - x_2 + x_0) \end{aligned} \tag{16}$$

で表される。この φ_x は、系 II の粒子の座標を表す演算子

$$Q = x_2 \tag{17}$$

の、固有値 $x + x_0$ に対する固有関数である。演算子 P と Q の交換関係は

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i} \tag{18}$$

で与えられ可換でないので、展開係数 ψ_k と φ_r が可換でない物理量を表す演算子の固有関数であることが示された。

さて、式 (7) と (8) で考えていた一般の場合に話を戻そう。関数 ψ_k と φ_r はある可換でない演算子 P と Q の固有関数で、対応する固有値をそれぞれ p_k と q_r と仮定した。つまり、系 I に対する A または B の測定によって、系 II を全く乱すことなく、系 II の物理量 P の値 (p_k) または Q の値 (q_r) が確実に予言可能な状況になるのである。我々の実在についての判定基準によると、前者の場合には物理量

P を実在の要素とみなさなければならず、後者の場合には物理量 Q を実在の要素と実在の要素とみなさなければならない。しかし、すでに見たように、これら２つの波動関数 ψ_k と φ_r が対応している（系 II の）実在は、全く同じものである。

前節で、次の２つのうちどちらかが成り立つことを証明した：(1) 波動関数による量子力学の実在の記述は完全ではない、または、(2) ２つの物理量に対応する演算子が可換でないとき、その２つの量は同時に実在性を持ちえない。ところが我々は今、波動関数が物理的実在の完全な記述を与えるとの仮定のもとに、可換でない演算子に対応する２つの物理量が同時に実在性を持つという結論に到達した。つまり (1) の否定が、唯一残った選択肢である (2) の否定を導いたのだ。これらのことから、物理的実在の量子力学的記述は不完全であると結論せざる負えない。

この結論に対する反論として、我々の実在についての判定基準は十分に制限的でない、と主張できるかもしれない。実際、２つ以上の物理量は、**同時に測定あるいは予言できる場合にのみ**、同時に実在の要素とみなせると主張したならば、我々の結論は導かれない。つまり、物理量 P と Q はそれぞれの場合に片方が予言できるだけで、同時に両方予言することは不可能なので、この観点からはこれらは同時には実在しない。しかしそう考えると、系 I を測定するプロセスはいかなる意味でも系 II に影響を与えることはないのに、それに系 II の物理量 P と Q の実在性が依存することになってしまう。合理的な実在性の定義がそんなことを許容できるとは、とても想像できない。

我々はこの論文で、波動関数が物理的実在の完全な記述を与えないということを示した。しかし、そのような完全な記述がそもそも存在するかどうかについては、何も言えていない。可能であると信じてはいるのだが。