

アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼンのパラドックスについて*

J.S. Bell

Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(Dated: 1964年11月4日 受理)

I. 序

アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼンのパラドックス [1] は、量子力学は完全な理論ではあり得ず、変数を追加して補完されるべきものであるとの論拠とされた。変数を追加することによって、理論に因果律と局所性を回復させるべきというのだ [2]。この小論では、その考えを数学的に定式化した上で、それが量子力学の統計的予言と両立しないことを示す。本質的に困難をもたらしているのは、局所性の要請、より正確に述べると、ある系の観測結果は、過去に相互作用していたが今は遠く離れたところにある系への操作によって影響されるべきではないという要請である。そのような分離可能性、或いは、局所性の要請がなくても量子力学の“隠れた変数”による解釈は不可能である、ということを示そうとする試みがいくつかある [3]。それについては別に議論するが [4]、そのような試みは未だ成功していない。初等的な量子論の隠れた変数解釈 [5] は実際に構成されており、その解釈は確かに明白に非局所的である。この論文で証明する結果によると、そのような特徴は、量子力学の予言を正確に再現するこの種の理論すべてに共通するものである。

II. 定式化

ボームとアハロノフ [6] の例に従い、EPR の議論を以下のように述べる。スピン一重項状態を構成している2つのスピン 1/2 の粒子を考え、それらが互いに逆方向に相互作用せず運動しているとしよう。例えばシュテルン-ゲルラッハの磁石を用いて、スピン σ_1 と σ_2 の任意に選んだ成分を測定することができる。 \vec{a} をある方向の単位ベクトルとする。量子力学によると、もしスピン成分 $\sigma_1 \cdot \vec{a}$ の測定結果が +1 であったとすると、 $\sigma_2 \cdot \vec{a}$ の測定結果は -1 とならなければならない、逆も同様に成り立つ。さてここで

以下のような仮定 [2] をしよう。これは一考に値する。2つのスピンの測定は互いに非常に離れたところで行われ、一方のスピンの測定のための磁石の向きは、もう一方のスピン測定に何ら影響を与えないとする。スピンのどの成分を選んでも、あらかじめ σ_1 の同じ成分の測定をしていれば σ_2 の測定結果は確実に予言できるので、そのような測定結果は実際にはあらかじめ決まっているのだと結論付けられる。最初に用意したスピンの波動関数は、個々の測定結果を決定していないので、このように測定結果が事前に決まっているということは、状態のより完全な記述が存在する可能性を示唆している。

ここでいうより完全な記述が、パラメタ λ によって得られるとしよう。以下では λ を一つの連続パラメタであるかのように記すが、 λ が一つの変数か変数の組か、あるいは関数の組か、変数は連続か離散的かなどは、一切以下の議論に関係はない。 $\sigma_1 \cdot \vec{a}$ の測定結果 A は \vec{a} と λ によって決まっており $\sigma_2 \cdot \vec{b}$ の測定結果 B は同様に \vec{b} と λ によって決まっている：

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \quad (1)$$

ここで重要な仮定 [2] は、粒子 2 の測定結果 B は粒子 1 の磁石の設定 \vec{a} に依存しないし、 A も \vec{b} に依存しないということだ。

$\rho(\lambda)$ を λ の分布関数とすると、2つの成分 $\sigma_1 \cdot \vec{a}$ と $\sigma_2 \cdot \vec{b}$ の積の期待値は

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (2)$$

で与えられる。これが量子力学的期待値に等しくなければならず、一重項状態に対してそれは

$$\langle (\sigma_1 \cdot \vec{a})(\sigma_2 \cdot \vec{b}) \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (3)$$

となる。しかし、これが不可能であることを以下で示す。

隠れた変数を2つの組に分けて、 A はその1つ、 B はもう一方に依存するように定式化しようとする人もいるかもしれない。これは今の定式化に既に含まれている。というのは、 λ は任意の数の変数を表し、それらに対する A と

* J.S. Bell, Physics 1, 195 (1964). "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox". 日本語翻訳：中西 秀

B の依存性にも何の制限も課していないからだ。また、アインシュタインが考えた完全な物理理論では、隠れた変数は動的な性質を持っていて運動法則にしたがう。その場合には、我々の λ はある適当な時刻におけるその変数の初期値を表すと考えればよい。

III. 例

主な結果の証明はきわめて単純だ。しかし、それを示す前にいくつか例を挙げておくと、見通しが良くなる。まず最初に、1 粒子に対してはスピン測定 of 隠れた変数による説明に何の困難もない。スピン 1/2 の粒子が、単位ベクトル \vec{p} で表される分極を持つ純粋状態にあるとする。隠れた変数を (例えば) 単位ベクトル $\vec{\lambda}$ として、その確率分布は $\vec{\lambda} \cdot \vec{p} > 0$ の半球上に一様だとしよう。スピン成分 $\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$ の測定結果が

$$\text{sign } \vec{\lambda} \cdot \vec{a}' \quad (4)$$

で与えられるとする。ここで \vec{a}' は \vec{a} と \vec{p} に依存する単位ベクトルで、どのように与えられるかはすぐ下で示す。また、符号関数 sign はその引数の符号に従って +1 または -1 の値をとる。 $\vec{\lambda} \cdot \vec{a}' = 0$ の時には不定になってしまうが、その確率はゼロなので気にする必要はない。 $\vec{\lambda}$ について平均を取ると、期待値は

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{a}' \rangle = 1 - \frac{2\theta'}{\pi} \quad (5)$$

となる。ここで、 θ' は \vec{a}' と \vec{p} の間の角度である。 θ を \vec{a} と \vec{p} の間の角として、 \vec{a}' は、 \vec{a} を \vec{p} に向かって

$$1 - \frac{2\theta'}{\pi} = \cos \theta \quad (6)$$

となるまで回転させて得られるものとする。すると、望む結果

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{a}' \rangle = \cos \theta \quad (7)$$

が得られる。というわけでこの単純な場合には、個々の測定の結果が余分の変数の値で決まっいて、量子力学の統計的な特徴はそれぞれの測定におけるその変数の値がわからないことからくる、という説明になんの困難もない。

第二に、よくある議論のように、この問題の性質のうち

$$\left. \begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{a}) &= -P(\vec{a}, -\vec{a}) = -1 \\ P(\vec{a}, \vec{b}) &= 0 \quad \text{if } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

だけを考えるのであれば、式 (2) の形で結果を再現するのに困難はない。例えば、今度は λ をすべての方向に一様に確率分布している単位ベクトル $\vec{\lambda}$ として、

$$\left. \begin{aligned} A(\vec{a}, \vec{\lambda}) &= \text{sign } \vec{a} \cdot \vec{\lambda} \\ B(\vec{b}, \vec{\lambda}) &= -\text{sign } \vec{b} \cdot \vec{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

とすると、

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -1 + \frac{2}{\pi} \theta \quad (10)$$

となる。 θ を \vec{a} と \vec{b} の間の角とすると、式 (10) は式 (8) を再現する。比較のため、純粋状態が時間とともに直積の混合状態に置き換わるとする、修正された理論 [6] の結果を見てみよう。この場合は相関関数として

$$-\frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (11)$$

を与える。実験的には、(10) を (3) から区別するほうが、(11) を (3) から区別するより難しそうだ。

式 (3) とは異なり、式 (10) は ($\theta = 0$ における) 最小値 -1 において停留でない。後で見ると、これは式 (2) で与えられる関数の特徴である。

最後に、もし A の結果が \vec{a} に加えて \vec{b} にも依存し、 B の結果が \vec{b} に加えて \vec{a} にも依存しても良いのなら、量子力学の相関 (3) を再現するのに困難はない。例えば、式 (9) の \vec{a} を \vec{b} に向かって回転して

$$1 - \frac{2}{\pi} \theta' = \cos \theta$$

を満たすような \vec{a}' で置き換えればよい。ここで、 θ' は \vec{a}' と \vec{b} とのなす角である。しかし、そんなことをすると与えられた隠れた変数に対して、一方の装置の測定結果が遠く離れた他方の装置の磁石の設定に依存してしまう。これは、まさに我々が避けたいと思っていた状況に他ならない。

IV. 矛盾

主な結果を証明しよう。 ρ は規格化された確率分布なので、

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1 \quad (12)$$

を満たし、性質 (1) のために式 (2) の P は -1 より小さくはなれない。これが $\vec{a} = \vec{b}$ の時に -1 になりうるのは、確率がゼロのいくつかの λ の点以外で

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda) \quad (13)$$

となる場合に限る。これを仮定すると、式 (2) は

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \quad (14)$$

と書き換えられる。すると式 (1) を用いて \vec{c} をもう一つの単位ベクトルとして、

$$\begin{aligned} & P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \\ &= - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1] \end{aligned}$$

が得られる。上式の絶対値から、不等式

$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)]$$

が示され、この右辺の第2項は $P(\vec{b}, \vec{c})$ なので、不等式

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq \left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \quad (15)$$

が得られる。 P が定数でない限り、右辺は一般に小さな $|\vec{b} - \vec{c}|$ に対して $|\vec{b} - \vec{c}|$ のオーダーである。従って、 $P(\vec{b}, \vec{c})$ は最小値 ($\vec{b} = \vec{c}$ で -1) において停留ではありえず、量子力学の値 (3) に等しくなり得ない。

さらに、量子力学による相関 (3) は式 (2) の形の関数で任意の精度で近似できるわけでもない。形式的証明は以下のように与えられる。孤立点上であればいくつかの点で近似が破綻してもかまわないので、式 (2) と (3) の代わりに関数

$$\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} \quad \text{および} \quad \overline{-\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

を考えよう。ここで上線は $P(\vec{a}', \vec{b}')$ と $-\vec{a}' \cdot \vec{b}'$ の \vec{a}' と \vec{b}' についての独立な平均を表す。ただし、 \vec{a}' と \vec{b}' はそれぞれ \vec{a} と \vec{b} のまわりのある指定された小さな角度領域に分布するとする。すべての \vec{a} と \vec{b} に対する両者の差の上限を ϵ とする：

$$\left| \overline{P(\vec{a}, \vec{b})} + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right| \leq \epsilon. \quad (16)$$

この ϵ は任意に小さくできないことを示そう。

すべての \vec{a} と \vec{b} に対して

$$\left| \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \delta \quad (17)$$

とする。すると式 (16) から

$$\left| \overline{P(\vec{a}, \vec{b})} + \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \epsilon + \delta \quad (18)$$

がえられ、式 (2) より

$$\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} = \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} \quad (19)$$

が得られる。ここで、

$$\left| \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \right| \leq 1 \quad \text{および} \quad \left| \overline{B(\vec{b}, \lambda)} \right| \leq 1 \quad (20)$$

である。式 (18) および (19) において $\vec{a} = \vec{b}$ とすると、

$$\int d\lambda \rho(\lambda) [\overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} + 1] \leq \epsilon + \delta \quad (21)$$

となる。一方、式 (19) より

$$\begin{aligned} & \overline{P(\vec{a}, \vec{b})} - \overline{P(\vec{a}, \vec{c})} \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} - \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)}] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)}] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)} [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)}] \end{aligned}$$

が得られるので、式 (20) を使うと、

$$\begin{aligned} \left| \overline{P(\vec{a}, \vec{b})} - \overline{P(\vec{a}, \vec{c})} \right| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)}] \\ &\quad + \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)}] \end{aligned}$$

が得られる。これに式 (19) と (21) を用いて、

$$\left| \overline{P(\vec{a}, \vec{b})} - \overline{P(\vec{a}, \vec{c})} \right| \leq 1 + \overline{P(\vec{b}, \vec{c})} + \epsilon + \delta$$

を得る。最後に、これに式 (18) を用いると

$$\left| \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| - 2(\epsilon + \delta) \leq 1 - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2(\epsilon + \delta)$$

すなわち、

$$4(\epsilon + \delta) \geq \left| \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| + \vec{b} \cdot \vec{c} - 1 \quad (22)$$

を得る。この式で、例えば $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1/\sqrt{2}$ と取ると、

$$4(\epsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1$$

となり、小さな δ に対しては、 ϵ は任意に小さくできないことが示された。というわけで、量子力学による期待値は式 (2) の形の表式によって、正確に、あるいは、任意の精度で表すことはできない。

V. 一般化

ここで考察した例の利点は、実際にどのような測定が行われるかを考えるのに、あまり想像力を要しないことだ。固有状態が完全系をなす任意のエルミート演算子は“観測可能量”である仮定することにより [7]、今の結果は形式的に他の系に容易に拡張できる。もし2つの系がそれぞれ2より大きい次元の状態空間を持っていれば、それぞれの2次元部分空間の直積空間を考えることができる。演算子 $\bar{\sigma}_1$ と $\bar{\sigma}_2$ は、この直積空間内では形式的に本論文で考えたものと同じ作用をし、直積空間外ではゼロとなるものと定義することができる。すると、少なくとも1つの量子力学的状態、すなわち、直積空間における“一重項状態”に対しては、量子力学の統計的予言は、2つの部分が分離可能で測定結果がそれぞれに対して予め決まっているという考えと両立しない。

VI. 結論

量子力学にパラメタを加えて、それにより個々の測定結果が予め決まってい、なおかつ、統計的な予言が量子力学と同じになるような理論においては、どんなに遠く離れていても、一方の測定装置の設定が、もう一方の測定装置の結果に影響を与えるという仕組みがなければならない。さらに言えば、その信号は瞬時にして伝わらなければならない。従って、そのような理論はローレンツ不変ではありえない。

もちろん、量子力学の予言が限られた有効性しかないとするれば、事情は異なる。もしかしたら、量子力学による予言は、測定装置が十分に前もって設定されていて、測定装置間の信号のやり取りが光の速度以下で行われ得る場合に限り、有効なのかもしれない。その意味で、ボームとアハロノフによって提案されたようなタイプ [6] の、粒子が飛んでいる間に装置の設定を変えるような実験が、決定的に

重要だ。

M. バンダー博士と J.K. ベリング博士に対し、この問題についての非常に有益な議論をしてくれたことに感謝します。この論文の最初の原稿は私がブランダイス大学滞在中に書きました。そこで同僚、および、ウィスコンシン大学の同僚に対し、この問題に関心を持ってもらってくださったことに感謝します。

参考文献

1. A. Einstein, N. Rosen and B. Podolsky, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935); 以下も参照のこと。N. Bohr, *Ibid.* **48**, 696 (1935), W.H. Furry, *Ibid.* **49**, 393 and 476 (1936), D.R. Inglis, *Rev. Mod. Phys.* **33**, 1 (1961).
2. “しかしながら、私の見解では、ひとつの想定に関しては絶対に譲れない:系 S_2 の実際の物理的状況は、遠く離れた系 S_1 に何がなされたかにはよらないということだ。” A. Einstein in *Albert Einstein, Philosopher Scientist*, (P.A. Schilp 編) p.85, Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois (1949).
3. J. Von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quanten-mechanik*. Verlag Julius-Springer, Berlin (1932), [英語訳: Princeton University Press (1955)]; J.M. Jauch and C. Piron, *Heov. Phys. Acta* **36**, 827 (1963).
4. J.S. Bell, 出版予定。
5. D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 166 and 180 (1952).
6. D. Bohm and Y. Aharonov, *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957).
7. P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (3rd Ed.) p.37. The Clarendon Press, Oxford (1947).