3/31, 2026. Hiizu Nakanishi

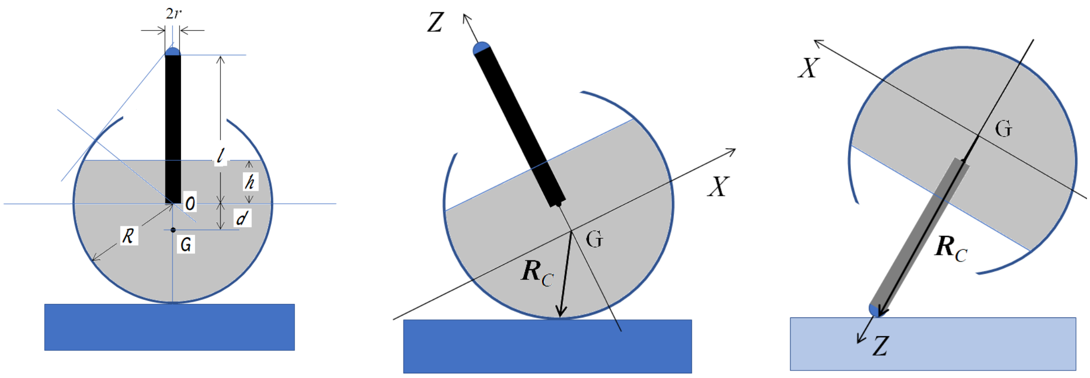
逆立ちゴマの運動

運動方程式：コマの重心の速度を $\boldsymbol{v}_G$、回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすると、重心の並進及び回転運動の方程式は、

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} = \boldsymbol{F} - Mg\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{1}$$

$$\frac{d\big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big)}{dt} = \boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{F}; \quad \boldsymbol{R}_C := \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_G \tag{2}$$

と与えられる。ここで、$\boldsymbol{F}$ は床からの抗力、$\boldsymbol{R}_C$ は重心 G から床との接点 C に向かうベクトルである。



コマの底面は半径 R の球で、上に突き出た軸は半径 r の半球とする。重心を原点とするコマに固定された座標系を用いると、底面の形状は、

$$f_R(\boldsymbol{R}) = -1 + \frac{1}{R^2}(\boldsymbol{R} - d\boldsymbol{e}_Z)\cdot(\boldsymbol{R} - d\boldsymbol{e}_Z) = 0$$

で与えられ、軸の先端の形状は

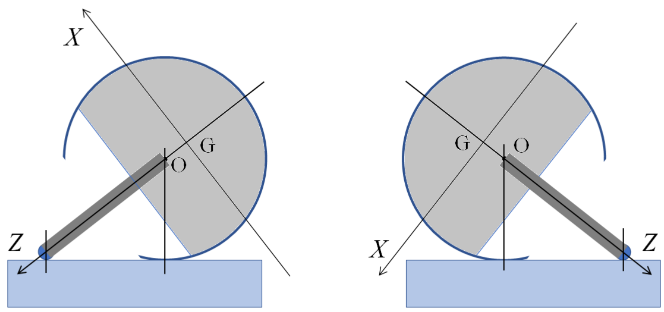
$$f_r(\boldsymbol{R}) = -1 + \frac{1}{r^2}\big(\boldsymbol{R} - (d+\ell)\boldsymbol{e}_Z\big)\cdot\big(\boldsymbol{R} - (d+\ell)\boldsymbol{e}_Z\big) = 0$$

で与えられる。ここで、d は球の中心から重心 G までの距離、ℓ は球の中心から軸の上端面の球の中心までの距離。

正立と倒立の条件

$$\boldsymbol{e}_Z\cdot\boldsymbol{e}_z > -\frac{R-r}{\ell} \qquad \text{正立}$$

$$\boldsymbol{e}_Z\cdot\boldsymbol{e}_z < -\frac{R-r}{\ell} \qquad \text{倒立}$$



接点の位置ベクトル $\boldsymbol{R}_C$ は、接点 C がコマの表面上の点であることと、接点における法線ベクトルが床に垂直、すなわち鉛直方向を向いているという 2 つの条件

$$f(\boldsymbol{R}_C) = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{R}_C) \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{3}$$

より決まる。ただし、$f(\boldsymbol{R})$ は $f_R(\boldsymbol{R})$ または $f_r(\boldsymbol{R})$。この条件より接点の位置ベクトル $\boldsymbol{R}_C$ は

1. 正立しているとき：
$$\boldsymbol{R}_C = -R\boldsymbol{e}_z + d\boldsymbol{e}_Z \tag{4}$$

2. 倒立しているとき：
$$\boldsymbol{R}_C = -r\boldsymbol{e}_z + (d+\ell)\boldsymbol{e}_Z \tag{5}$$

と与えられる。

一方、抗力 $\boldsymbol{F}$ はスリップなし条件

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} \tag{6}$$

より決まる。

運動方程式の解法：並進と回転の運動方程式より抗力 $\boldsymbol{F}$ を消去して、

$$\frac{d(\hat{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} = \boldsymbol{R}_C \times M\left(\frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)$$

ここで、ベクトル $\boldsymbol{R}_C$ および $\boldsymbol{\omega}$ を XYZ 座標系で表わすと、時間微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{d(\hat{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} &= \hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) \\
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) &= \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) \\
&= \dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) \\
&= \dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \omega^2 \boldsymbol{R}_C - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C)\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

となる。ただし、XYZ 系での時間微分を

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} := \dot{\boldsymbol{a}} := \dot{a}_X \hat{\boldsymbol{e}}_X + \dot{a}_Y \hat{\boldsymbol{e}}_Y + \dot{a}_Z \hat{\boldsymbol{e}}_Z$$

と表記する。

すると運動方程式は、

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) = M\boldsymbol{R}_C \times \left(\dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \omega^2 \boldsymbol{R}_C - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C)\boldsymbol{\omega} + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} - M\boldsymbol{R}_C \times (\boldsymbol{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) &= -\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\boldsymbol{R}_C \times \left(\dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \omega^2 \boldsymbol{R}_C - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C)\boldsymbol{\omega} + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \\
\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} - M\left((\boldsymbol{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}})\boldsymbol{R}_C - R_C^2 \dot{\boldsymbol{\omega}}\right) &= -\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\left(\boldsymbol{R}_C \times (\dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C)\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \\
&= -\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\left((\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{R}}_C - (\boldsymbol{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_C)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C)\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \\
\hat{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\left((\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{R}}_C - (\boldsymbol{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_C)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C)\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right)
\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \hat{I}_C^{-1}\left(-\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\left((\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{R}}_C - (\boldsymbol{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_C)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C)\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right)\right)$$

ここで、$\hat{I}_C$ は接点 C を中心とする慣性モーメントテンソル：

$$\hat{I}_C := \begin{pmatrix} A + M(R_C^2 - X_C^2), & -MX_CY_C, & -MX_CZ_C \\ -MY_CX_C, & B + M(R_C^2 - Y_C^2), & -MY_CZ_C \\ -MZ_CX_C, & -MZ_CY_C, & C + M(R_C^2 - Z_C^2) \end{pmatrix}$$

変数： $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z,\quad R_q,\quad x_G, y_G,\quad \Big(v_{Gx},\, v_{Gy}\Big)$

方程式：並進の運動方程式は xyz 系、回転の方程式は XYZ 系で与える。

$$\begin{aligned}
\dot{x}_G &= v_{Gx}\\
\dot{y}_G &= v_{Gy}\\
\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \hat{I}_C^{-1}\Big(-\boldsymbol{\omega}\times\big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big)\\
&\qquad + M\Big(\big(\boldsymbol{R}_C\cdot\boldsymbol{\omega}\big)\dot{\boldsymbol{R}}_C - \big(\boldsymbol{R}_C\cdot\dot{\boldsymbol{R}}_C\big)\boldsymbol{\omega} - \big(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{R}_C\big)\boldsymbol{R}_C\times\boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\Big)\Big)\\
\dot{R}_q &= \frac{1}{2}\,R_q\omega_q\,;\qquad R_q:\text{剛体固定系から実験室系への回転を表す四元数}
\end{aligned}$$

中間変数：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_G &:= \boldsymbol{R}_C\times\boldsymbol{\omega}\qquad\text{(no slip)}\\
\boldsymbol{R}_C &:= \begin{cases} -R\boldsymbol{e}_z + d\boldsymbol{e}_Z & \text{（正立）}\\ -r\boldsymbol{e}_z + (d+\ell)\boldsymbol{e}_Z & \text{（倒立）}\end{cases}\\
\dot{\boldsymbol{R}}_C &:= \frac{d\boldsymbol{R}_C}{dt} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_C = \begin{cases} R\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_z & \text{（正立）}\\ r\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_z & \text{（倒立）}\end{cases}\\
\hat{I}_C &:= \begin{pmatrix} A + M\big(R_C^2 - X_C^2\big), & -MX_CY_C, & -MX_CZ_C\\ -MY_CX_C, & B + M\big(R_C^2 - Y_C^2\big), & -MY_CZ_C\\ -MZ_CX_C, & -MZ_CY_C, & C + M\big(R_C^2 - Z_C^2\big)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

物理量：

$$\begin{aligned}
z_G &= -\boldsymbol{R}_C\cdot\boldsymbol{e}_z = \begin{cases} R - d\,e_{zZ} & \text{（正立）}\\ r - (d+\ell)\,e_{zZ} & \text{（倒立）}\end{cases}\\
a_q^x &= R_q\,a_q^X R_q^{-1};\qquad a_q^x = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k},\quad a_q^X = a_X\hat{i} + a_Y\hat{j} + a_Z\hat{k}
\end{aligned}$$

パラメーター：

- Geometrical parameters:

$$R, r, h, \ell[\mathrm{L}]\ \text{コマの軸の長さ}$$

- Physical properties:

$$\rho[\mathrm{ML}^{-3}] = 1$$

- Physical constants:

$$g[\mathrm{LT}^{-2}] = 1$$

- Auxiliary parameters:

$$d[\mathrm{L}], I_X = I_Y, I_Z$$

変数：

$$\boldsymbol{r}_G, \quad \boldsymbol{\omega}, \quad R_q$$
$$\boldsymbol{R}_C, \quad \boldsymbol{e}_z, \quad \hat{I}_C$$

座標系の関係： $A_q^S = R_q A_q^B R_q^{-1}$

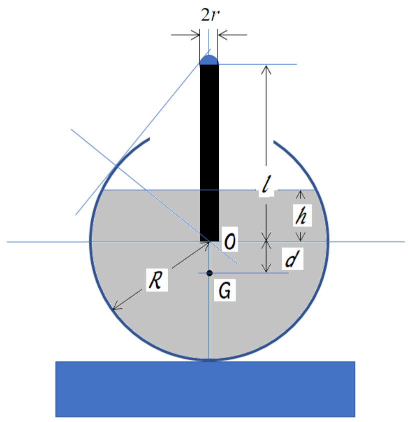
$$e_{zX}\hat{\imath} + e_{zY}\hat{\jmath} + e_{zZ}\hat{k} = R_q^{-1}\hat{k}\,R_q$$

$$\begin{aligned} e_{Xx}\hat{\imath} + e_{Xy}\hat{\jmath} + e_{Xz}\hat{k} &= R_q\,\hat{\imath}R_q^{-1} \\ e_{Yx}\hat{\imath} + e_{Yy}\hat{\jmath} + e_{Yz}\hat{k} &= R_q\,\hat{\jmath}R_q^{-1} \\ e_{Zx}\hat{\imath} + e_{Zy}\hat{\jmath} + e_{Zz}\hat{k} &= R_q\,\hat{k}R_q^{-1} \end{aligned}$$

エネルギー

$$E = K + U; \qquad K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t\hat{I}\,\boldsymbol{\omega}, \quad U = -Mg\boldsymbol{R}_C\cdot\boldsymbol{e}_z$$

コマの質量と重心周りの慣性モーメントテンソル



円柱部（コマの軸）： 半径 r，長さ ℓ

$$
\begin{aligned}
M_a &:= \pi r^2 \ell \rho, \\
Z'^a_G &:= \frac{1}{2}\ell \\
I^a_X = I^a_Y &= \frac{1}{4}M_a r^2 + \frac{1}{12}M_a \ell^2, \\
I^a_Z &= \frac{1}{2}M_a r^2,
\end{aligned}
$$

球部：半径 R，高さ $-R$ から h

$$
\begin{aligned}
M_s &= \int_{-R}^{h} dZ'\, \pi \sqrt{R^2 - Z'^2}^2 \rho \ = \pi R^3 \rho \left(\left(\frac{h}{R}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{R}\right)^3 + \frac{2}{3} \right) \\
Z'^s_G &= \frac{1}{M_s}\int_{-R}^{h} dZ'\, \pi \sqrt{R^2 - Z'^2}^2 \rho Z' \ = \frac{1}{4}\frac{\pi R^3 \rho}{M_s} R \left(2\left(\frac{h}{R}\right)^2 - \left(\frac{h}{R}\right)^4 - 1 \right)
\end{aligned}
$$

球の中心周りの慣性モーメント I'^s_X, I'^s_Y

$$
\begin{aligned}
I'^s_X = I'^s_Y &= \int_{-R}^{h} dZ' \left(\frac{1}{4}\pi \sqrt{R^2 - Z'^2}^4 \rho + \pi \sqrt{R^2 - Z'^2}^2 \rho Z'^2 \right) \\
&= \pi\rho \int_{-R}^{h} dZ' \left(\frac{1}{4}(R^2 - Z'^2)^2 + (R^2 - Z'^2) Z'^2 \right) \\
&= \frac{1}{4}\pi R^5 \rho \left(\left(\frac{h}{R}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{h}{R}\right)^3 - \frac{3}{5}\left(\frac{h}{R}\right)^5 + \frac{16}{15} \right) = M_s Z'^2_s + I^s_X = M_s Z'^2_s + I^s_Y \\
I^s_Z &= \int_{-R}^{h} dZ' \int_0^{\sqrt{R^2 - Z'^2}} dr\, 2\pi r\, \rho\, r^2 \\
&= \frac{1}{2}\pi R^5 \rho \left(\left(\frac{h}{R}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{h}{R}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{R}\right)^5 + \frac{8}{15} \right)
\end{aligned}
$$

コマ全体：

$$
\begin{aligned}
M &= M_a + M_s \\
Z'_G &= \frac{M_a Z'_a + M_s Z'_s}{M_a + M_s} = -d \\
I_X = I_Y &= I^a_X + M_a (Z'_a - Z'_G)^2 + I^s_X + M_s (Z'_s - Z'_G)^2 \\
&= I^a_X + M_a (Z'_a - Z'_G)^2 + I'^s_X + M_s Z'_G (Z'_G - 2Z'_s) \\
I_Z &= I^a_Z + I^s_Z
\end{aligned}
$$

スリップありの場合

床からの抗力 $\boldsymbol{F}$ は、床面に平行な成分 $\boldsymbol{F}_t$ と鉛直成分 $\boldsymbol{F}_n$ に分かれ、$\boldsymbol{F}_t$ は接点の速度 $\boldsymbol{v}_C$ に比例すると仮定する（スリップ条件）:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_n; \qquad \boldsymbol{F}_t = -k\boldsymbol{v}_C \perp \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{F}_n \parallel \boldsymbol{e}_z$$

並進の運動方程式の $\boldsymbol{e}_z$ に垂直な成分（x, y 成分）は、

$$M\frac{dv_{Gx}}{dt} = -kv_{Cx}, \qquad M\frac{dv_{Gy}}{dt} = -kv_{Cy}$$

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C$$

と表され、並進運動方程式の $\boldsymbol{e}_z$ に平行な成分から $\boldsymbol{F}_n$ が求まる。
角運動量の方程式は

$$\frac{d(\hat{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} = \boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{F}; \qquad \boldsymbol{R}_C = \begin{cases} -R\boldsymbol{e}_z + d\boldsymbol{e}_Z & \text{（正立）} \\ -r\boldsymbol{e}_z + (d+\ell)\boldsymbol{e}_Z & \text{（倒立）} \end{cases}, \quad \boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{F}_n$$

と与えられる。

$\boldsymbol{F}_n$ の導出: コマの接点 C が床から離れない条件：

$$\boldsymbol{e}_z \perp \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C \quad \Rightarrow \quad v_{Gz} = -\big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C\big) \cdot \boldsymbol{e}_z$$

この時間微分より、$\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \dot{v}_{Gz} &= -\big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{R}_C\big) \cdot \boldsymbol{e}_z - \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{R}_C}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{e}_z \\ &= \begin{cases} -d\Big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{e}_Z + \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_Z\big)\Big) \cdot \boldsymbol{e}_z & \text{（正立）} \\ -(d+\ell)\Big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{e}_Z + \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_Z\big)\Big) \cdot \boldsymbol{e}_z & \text{（倒立）} \end{cases} \end{aligned}$$

これを運動方程式の鉛直成分に代入して、

$$\begin{aligned} F_n &= Mg + M\dot{v}_{Gz} = Mg - M\left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{R}_C}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{e}_z \\ &= -M\big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{R}_C\big) \cdot \boldsymbol{e}_z + M\left(g - \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{R}_C}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{e}_z\right) \\ &= -Md\big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{e}_Z\big) \cdot \boldsymbol{e}_z + M\Big(g - d\big(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_Z)\big) \cdot \boldsymbol{e}_z\Big) \\ &=: F_{n1} \quad + \quad F_{n2} \end{aligned}$$

をえる。ここで、F_{n1} は F_n のうち $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ に依存する成分で、F_{n2} は依存しない成分。

$$\begin{aligned} F_{n1} &= -M\big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{R}_C\big) \cdot \boldsymbol{e}_z = -M\big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times d\boldsymbol{e}_Z\big) \cdot \boldsymbol{e}_z = -Md\big(-e_{zY}\dot{\omega}_X + e_{zX}\dot{\omega}_Y\big) \\ F_{n2} &= M\left(g - \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{R}_C}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{e}_z\right) = M\Big(g - \big(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times d\boldsymbol{e}_Z)\big) \cdot \boldsymbol{e}_z\Big) \end{aligned}$$

角運動量の方程式の XYZ 成分

$$
\begin{aligned}
\frac{d(\hat{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} &= \boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{R}_C \times (k\boldsymbol{v}_C - F_n\boldsymbol{e}_z) \\
&= -\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C + d\boldsymbol{e}_Z \times F_n\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A\dot{\omega}_X - (A-C)\omega_Y\omega_Z &= \Big(-\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot\boldsymbol{e}_X + \Big(d\boldsymbol{e}_Z \times F_n\boldsymbol{e}_z\Big)\cdot\boldsymbol{e}_X \\
&= \Big(-\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot\boldsymbol{e}_X - dF_n\boldsymbol{e}_Y\cdot\boldsymbol{e}_z \\
A\dot{\omega}_Y + (A-C)\omega_Z\omega_X &= \Big(-\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot\boldsymbol{e}_Y + \Big(d\boldsymbol{e}_Z \times F_n\boldsymbol{e}_z\Big)\cdot\boldsymbol{e}_Y \\
&= \Big(-\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot\boldsymbol{e}_Y + dF_n\boldsymbol{e}_X\cdot e_z \\
C\dot{\omega}_Z &= \Big(R\boldsymbol{e}_z \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot\boldsymbol{e}_Z
\end{aligned}
$$

このうち、XY 成分の方程式は

$$
\begin{aligned}
&A\dot{\omega}_X - Md^2e_{zY}\big(-e_{zY}\dot{\omega}_X + e_{zX}\dot{\omega}_Y\big) = (A-C)\omega_Y\omega_Z + \Big(-\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot\boldsymbol{e}_X - dF_{n2}e_{zY} \\
&A\dot{\omega}_Y + Md^2e_{zX}\big(-e_{zY}\dot{\omega}_X + e_{zX}\dot{\omega}_Y\big) = -(A-C)\omega_Z\omega_X + \Big(-\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot\boldsymbol{e}_Y + dF_{n2}e_{zX}
\end{aligned}
$$

これを行列で表すと、!! ここまで !!

$$
A\hat{T}\begin{pmatrix}\dot{\omega}_X \\ \dot{\omega}_Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(A-C)\omega_Y\omega_Z + \Big(-\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot\boldsymbol{e}_X - dF_{n2}e_{zY} \\ -(A-C)\omega_Z\omega_X + \Big(-\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot\boldsymbol{e}_Y + dF_{n2}e_{zX}\end{pmatrix}
$$

ここで、

$$
\hat{T} := \begin{pmatrix} 1+\alpha_{YY}, & -\alpha_{YX} \\ -\alpha_{XY}, & 1+\alpha_{XX}\end{pmatrix}; \qquad \alpha_{XX} := \frac{Md^2}{A}e_{zX}e_{zX},\ \alpha_{XY} := \frac{Md^2}{A}e_{zX}e_{zY},\ etc.
$$

変数： $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z, \quad R_q, \quad x_G, y_G, \quad v_{Gx}, v_{Gy}$

方程式： 並進の運動方程式は xyz 系、回転の方程式は XYZ 系で与える。

$$\begin{aligned}
\dot{x}_G &= v_{Gx} \\
\dot{y}_G &= v_{Gy} \\
\dot{v}_{Gx} &= -\frac{k}{M}\, v_{Cx} \\
\dot{v}_{Gy} &= -\frac{k}{M}\, v_{Cy} \\
\begin{pmatrix} \dot{\omega}_X \\ \dot{\omega}_Y \end{pmatrix} &= \frac{1}{A}\,\hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} (A-C)\omega_Y\omega_Z - \big(\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\big)\cdot \boldsymbol{e}_X - dF_{n2}e_{zY} \\ -(A-C)\omega_Z\omega_X - \big(\boldsymbol{R}_C \times k\boldsymbol{v}_C\big)\cdot \boldsymbol{e}_Y + dF_{n2}e_{zX} \end{pmatrix} \\
\dot{\omega}_Z &= \frac{1}{C}\Big(R\boldsymbol{e}_z \times k\boldsymbol{v}_C\Big)\cdot \boldsymbol{e}_Z \\
\dot{R}_q &= \frac{1}{2} R_q \omega_q
\end{aligned}$$

中間変数：

$$a_q^x = R_q\, a_q^X R_q^{-1}; \qquad a_q^x = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}, \quad a_q^X = a_X\hat{\imath} + a_Y\hat{\jmath} + a_Z\hat{k}$$

$$\boldsymbol{v}_C := \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C$$

$$\boldsymbol{R}_C := \begin{cases} -R\boldsymbol{e}_z + d\boldsymbol{e}_Z & \text{（正立）} \\ -r\boldsymbol{e}_z + (d+\ell)\boldsymbol{e}_Z & \text{（倒立）} \end{cases}$$

$$F_{n2} := M\Big(g - d\big(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_Z)\big)\cdot \boldsymbol{e}_z\Big) = M\bigg(g - d\Big(\omega_Z(\omega_X e_{zX} + \omega_Y e_{zY}) + (\omega_X^2 + \omega_Y^2)e_{zZ}\Big)\bigg)$$

$$\hat{T} := \begin{pmatrix} 1+\alpha_{YY}, & -\alpha_{YX} \\ -\alpha_{XY}, & 1+\alpha_{XX} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{XX} := \frac{Md^2}{A} e_{zX}e_{zX}, \quad \alpha_{XY} := \frac{Md^2}{A} e_{zX}e_{zY}, \quad etc.$$

物理量：

$$z_G := -\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{e}_z = \begin{cases} R - d\, e_{zZ} & \text{（正立）} \\ r - (d+\ell)\, e_{zZ} & \text{（倒立）} \end{cases}$$

$$a_q^x = R_q\, a_q^X R_q^{-1}; \qquad a_q^x = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}, \quad a_q^X = a_X\hat{\imath} + a_Y\hat{\jmath} + a_Z\hat{k}$$

球の中心の座標 $\boldsymbol{r}_O$：

$$\boldsymbol{r}_O = \boldsymbol{r}_G + d\,\boldsymbol{e}_Z \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_O &= x_G + d\, e_{xZ} \\ y_O &= y_G + d\, e_{yZ} \\ z_O &= z_G + d\, e_{zZ} \end{cases}$$

初期条件： $v_{Cx} = \boldsymbol{v}_{Gx}$, $v_{Cy} = \boldsymbol{v}_{Gy}$, となる $\boldsymbol{\omega}$ の条件

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C)\cdot \boldsymbol{e}_x &= 0 \\ (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C)\cdot \boldsymbol{e}_y &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{e}_x)\cdot \boldsymbol{\omega} &= 0 \\ (\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{e}_y)\cdot \boldsymbol{\omega} &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \parallel (\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{e}_x)\times(\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{e}_y) \parallel \boldsymbol{R}_C$$