

対称コマの運動 — 軸の太さが有限の場合

運動方程式：コマの重心の速度を $\mathbf{v}_G$ 、回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすると、重心の並進及び回転運動の方程式は、

$$M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \mathbf{F} - Mg\hat{\mathbf{e}}_z \quad (1)$$

$$\frac{d(\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega})}{dt} = \mathbf{R}_C \times \mathbf{F}; \quad \mathbf{R}_C := \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_G \quad (2)$$

と与えられる。ここで、 $\mathbf{F}$ は床からの抗力、 $\mathbf{R}_C$ は重心 G から床との接点 C に向かうベクトルである。

コマの軸が有限の太さ（半径 r ）を持っており、先端部は半球面とする。コマに固定された座標軸を XYZ とし、重心を原点、回転軸を Z 軸に取る。すると、先端部の半球面は、

$$f(\mathbf{R}) = -1 + \frac{1}{r^2}(\mathbf{R} + h\mathbf{e}_Z) \cdot (\mathbf{R} + h\mathbf{e}_Z) = 0$$

で与えられる。ここで、 h は半球面の中心と重心の間の距離である。

接点の位置ベクトル $\mathbf{R}_C$ は、接点 C が半球面上の点であることと、接点における法線ベクトルが床に垂直、すなわち鉛直方向を向いているという2つの条件より決まる：

$$f(\mathbf{R}_C) = 0, \quad \nabla f(\mathbf{R}_C) \parallel \hat{\mathbf{e}}_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C = -r\mathbf{e}_z - h\mathbf{e}_Z. \quad (3)$$

一方、抗力 $\mathbf{F}$ はスリップなし条件

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega} \quad (4)$$

より決まる。

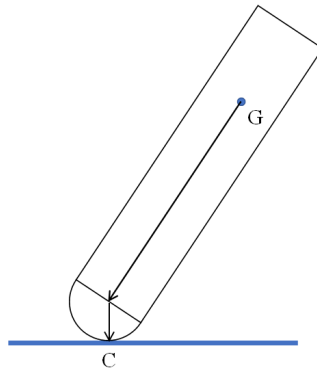


図 1: 軸の接点と $\mathbf{R}_C$

運動方程式の解法：並進と回転の運動方程式より抗力 $\mathbf{F}$ を消去して、

$$\frac{d(\hat{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} = \mathbf{R}_C \times M \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) + g\hat{\mathbf{e}}_z \right)$$

ここで、ベクトル $\mathbf{R}_C$ および $\boldsymbol{\omega}$ を XYZ 座標系で表わすと、時間微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d(\hat{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} &= \hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) \\ &= \dot{\mathbf{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega}) \\ &= \dot{\mathbf{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \omega^2 \mathbf{R}_C - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_C)\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

となる。ただし、 XYZ 系での時間微分を

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} := \dot{\mathbf{a}} := \dot{a}_X \hat{\mathbf{e}}_X + \dot{a}_Y \hat{\mathbf{e}}_Y + \dot{a}_Z \hat{\mathbf{e}}_Z$$

と表記する。

すると運動方程式は、

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) = M\mathbf{R}_C \times \left(\dot{\mathbf{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \omega^2 \mathbf{R}_C - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_C)\boldsymbol{\omega} + g\hat{\mathbf{e}}_z \right)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} - M\mathbf{R}_C \times (\mathbf{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) &= -\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\mathbf{R}_C \times \left(\dot{\mathbf{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{R}_C - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_C)\boldsymbol{\omega} + g\hat{\mathbf{e}}_z \right) \\ \hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} - M\left((\mathbf{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{R}_C - R_C^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} \right) &= -\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\left(\mathbf{R}_C \times (\dot{\mathbf{R}}_C \times \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_C)\mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\mathbf{R}_C \times \hat{\mathbf{e}}_z \right) \\ &= -\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\left((\mathbf{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega})\dot{\mathbf{R}}_C - (\mathbf{R}_C \cdot \dot{\mathbf{R}}_C)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_C)\mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\mathbf{R}_C \times \hat{\mathbf{e}}_z \right) \\ \hat{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\left((\mathbf{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega})\dot{\mathbf{R}}_C - (\mathbf{R}_C \cdot \dot{\mathbf{R}}_C)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_C)\mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\mathbf{R}_C \times \hat{\mathbf{e}}_z \right) \end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \hat{I}_C^{-1} \left(-\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) + M\left((\mathbf{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega})\dot{\mathbf{R}}_C - (\mathbf{R}_C \cdot \dot{\mathbf{R}}_C)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_C)\mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\mathbf{R}_C \times \hat{\mathbf{e}}_z \right) \right)$$

ここで、 $\hat{I}_C$ は接点 C を中心とする慣性モーメントテンソル：

$$\hat{I}_C := \begin{pmatrix} A + M(R_C^2 - X_C^2), & -MX_C Y_C, & -MX_C Z_C \\ -MY_C X_C, & B + M(R_C^2 - Y_C^2), & -MY_C Z_C \\ -MZ_C X_C, & -MZ_C Y_C, & C + M(R_C^2 - Z_C^2) \end{pmatrix}$$

変数： $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z, R_q, x_G, y_G, (v_{Gx}, v_{Gy})$

方程式：並進の運動方程式は xyz 系、回転の方程式は XYZ 系で与える。

$$\dot{x}_G = v_{Gx}$$

$$\dot{y}_G = v_{Gy}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} = & \hat{I}_C^{-1} \left(-\boldsymbol{\omega} \times (\hat{I} \boldsymbol{\omega}) \right. \\ & \left. + M \left((\mathbf{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega}) \dot{\mathbf{R}}_C - (\mathbf{R}_C \cdot \dot{\mathbf{R}}_C) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_C) \mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g \mathbf{R}_C \times \hat{\mathbf{e}}_z \right) \right) \end{aligned}$$

$$\dot{R}_q = \frac{1}{2} R_q \omega_q; \quad R_q: \text{剛体固定系から実験室系への回転を表す四元数}$$

中間変数：

$$\mathbf{v}_G := \mathbf{R}_C \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{R}_C := -(r \mathbf{e}_z + h \mathbf{e}_Z)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_C := -(r \dot{\mathbf{e}}_z + h \dot{\mathbf{e}}_Z) = r \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z$$

$$\hat{I}_C := \begin{pmatrix} A + M(R_C^2 - X_C^2), & -MX_C Y_C, & -MX_C Z_C \\ -MY_C X_C, & B + M(R_C^2 - Y_C^2), & -MY_C Z_C \\ -MZ_C X_C, & -MZ_C Y_C, & C + M(R_C^2 - Z_C^2) \end{pmatrix}$$

物理量：

$$z_G = -\mathbf{R}_C \cdot \mathbf{e}_z = r + h e_{zZ}$$

$$a_q^x = R_q a_q^X R_q^{-1}; \quad a_q^x = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad a_q^X = a_X \hat{i} + a_Y \hat{j} + a_Z \hat{k}$$

パラメーター :

- Geometrical parameters:

$$r, h, L[\text{L}] = 1 \text{ コマの軸の長さ}$$

- Physical properties:

$$M[\text{M}] = 1, \quad A, B, C, [\text{ML}^2]$$

- Physical constants:

$$g[\text{LT}^{-2}] = 1$$

- Auxiliary parameters:

$$L = 1, \ell_1, \ell_2, \ell_3, a, \rho [\text{ML}^{-3}] = 1$$

$$\hat{I},$$

変数 :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_G, \quad \boldsymbol{\omega}, \quad R_q \\ \mathbf{R}_C, \quad \mathbf{e}_z, \quad \hat{I}_C \end{aligned}$$

座標系の関係 : $A_q^S = R_q A_q^B R_q^{-1}$

$$e_{zX}\hat{i} + e_{zY}\hat{j} + e_{zZ}\hat{k} = R_q^{-1}\hat{k} R_q$$

$$\begin{aligned} e_{Xx}\hat{i} + e_{Xy}\hat{j} + e_{Xz}\hat{k} &= R_q \hat{i} R_q^{-1} \\ e_{Yx}\hat{i} + e_{Yy}\hat{j} + e_{Yz}\hat{k} &= R_q \hat{j} R_q^{-1} \\ e_{Zx}\hat{i} + e_{Zy}\hat{j} + e_{Zz}\hat{k} &= R_q \hat{k} R_q^{-1} \end{aligned}$$

エネルギー

$$E = K + U; \quad K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \hat{I} \boldsymbol{\omega}, \quad U = -Mg \mathbf{R}_C \cdot \mathbf{e}_z$$

コマの質量と重心周りの慣性モーメントテンソル

円柱部：半径 a 、高さ $\ell_3 - \ell_2$

$$r_{G1} = \frac{1}{2}(\ell_3 + \ell_2)$$

$$M_1 = \rho V_1$$

$$V_1 = \pi a^2(\ell_3 - \ell_2)$$

$$A_1 = \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{1}{3}(\ell_3 - \ell_2)^2 \right) M_1$$

$$C_1 = \frac{1}{2} M_1 a^2$$

円錐部：半径 a 、高さ $\ell_2 - \ell_1$

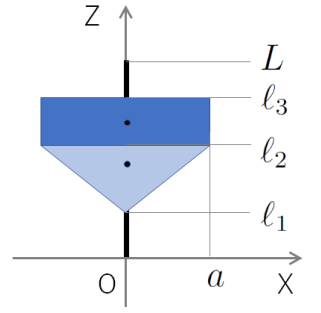
$$r_{G2} = \frac{1}{4}(3\ell_2 + \ell_1)$$

$$M_2 = \rho V_2$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi a^2(\ell_2 - \ell_1)$$

$$A_2 = \frac{3}{20} \left(a^2 + \frac{1}{4}(\ell_2 - \ell_1)^2 \right) M_2$$

$$C_2 = \frac{3}{10} M_2 a^2$$



コマ全体：パラメーター： $L = 1, \ell_1, \ell_2, \ell_3, a, \rho = 1$

$$r_G = \frac{M_1 r_{G1} + M_2 r_{G2}}{M_1 + M_2}$$

$$M = M_1 + M_2$$

$$C = C_1 + C_2$$

$$A_0 = A_1 + M_1 r_{G1}^2 + A_2 + M_2 r_{G2}^2$$

スリップありの場合

床からの抗力 $\mathbf{F}$ は、床面に平行な成分 $\mathbf{F}_t$ と鉛直成分 $\mathbf{F}_n$ に分かれ、 $\mathbf{F}_t$ は接点の速度 $\mathbf{v}_C$ に比例すると仮定する（スリップ条件）：

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n; \quad \mathbf{F}_t = -k\mathbf{v}_C \perp \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F}_n \parallel \mathbf{e}_z$$

並進の運動方程式の $\mathbf{e}_z$ に垂直な成分 (x, y 成分) は、

$$M \frac{dv_{Gx}}{dt} = -kv_{Cx}, \quad M \frac{dv_{Gy}}{dt} = -kv_{Cy}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C = \mathbf{v}_G - \boldsymbol{\omega} \times (r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z)$$

と表され、 $\mathbf{e}_z$ に平行な成分から $\mathbf{F}_n$ が求まる。

角運動量の方程式は

$$\frac{d(\hat{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} = \mathbf{R}_C \times \mathbf{F}; \quad \mathbf{R}_C = -(r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z), \quad \mathbf{F} = -k\mathbf{v}_C + \mathbf{F}_n$$

と与えられる。

$\mathbf{F}_n$ の導出: コマの接点 C が床から離れない条件：

$$\mathbf{e}_z \perp \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C \Rightarrow v_{Gz} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C) \cdot \mathbf{e}_z = h(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_Z) \cdot \mathbf{e}_z$$

これより、

$$\dot{v}_{Gz} = h(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_Z + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_Z)) \cdot \mathbf{e}_z \quad \left(\because \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \right)$$

これを運動方程式の鉛直成分に代入して、

$$\begin{aligned} F_n &= Mg + M\dot{v}_{Gz} = Mg + Mh(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_Z + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_Z)) \cdot \mathbf{e}_z \\ &= Mh(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_Z) \cdot \mathbf{e}_z + M(g + h(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_Z)) \cdot \mathbf{e}_z) \\ &=: \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} \end{aligned}$$

をえる。ここで、 $\mathbf{F}_{n1}$ は $\mathbf{F}_n$ のうち $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ に依存する成分で、 $\mathbf{F}_{n2}$ は依存しない成分。

$$\begin{aligned} F_{n1} &= Mh(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_Z) \cdot \mathbf{e}_z = Mh(-e_{zY}\dot{\omega}_X + e_{zX}\dot{\omega}_Y) \\ F_{n2} &= M(g + h(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_Z)) \cdot \mathbf{e}_z) \end{aligned}$$

角運動量の方程式の XYZ 成分

$$\begin{aligned}\frac{d(\hat{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} &= \mathbf{R}_C \times \mathbf{F} = (r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times (k\mathbf{v}_C - F_n\mathbf{e}_z) \\ &= (r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times k\mathbf{v}_C - h\mathbf{e}_Z \times F_n\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\dot{\omega}_X - (A - C)\omega_Y\omega_Z &= \left((r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times k\mathbf{v}_C\right) \cdot \mathbf{e}_X - \left(h\mathbf{e}_Z \times F_n\mathbf{e}_z\right) \cdot \mathbf{e}_X \\ &= \left((r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times k\mathbf{v}_C\right) \cdot \mathbf{e}_X + hF_n\mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{e}_z \\ A\dot{\omega}_Y + (A - C)\omega_Z\omega_X &= \left((r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times k\mathbf{v}_C\right) \cdot \mathbf{e}_Y - \left(h\mathbf{e}_Z \times F_n\mathbf{e}_z\right) \cdot \mathbf{e}_Y \\ &= \left((r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times k\mathbf{v}_C\right) \cdot \mathbf{e}_Y - hF_n\mathbf{e}_X \cdot \mathbf{e}_z \\ C\dot{\omega}_Z &= \left(r\mathbf{e}_z \times k\mathbf{v}_C\right) \cdot \mathbf{e}_Z\end{aligned}$$

このうち、 XY 成分の方程式は

$$\begin{aligned}A\dot{\omega}_X - Mh^2e_{zY}(-e_{zY}\dot{\omega}_X + e_{zX}\dot{\omega}_Y) &= (A - C)\omega_Y\omega_Z + \left((r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times k\mathbf{v}_C\right) \cdot \mathbf{e}_X + hF_n e_{zY} \\ A\dot{\omega}_Y + Mh^2e_{zX}(-e_{zY}\dot{\omega}_X + e_{zX}\dot{\omega}_Y) &= -(A - C)\omega_Z\omega_X + \left((r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times k\mathbf{v}_C\right) \cdot \mathbf{e}_Y - hF_n e_{zX}\end{aligned}$$

これを行列で表すと、

$$A\hat{T} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_X \\ \dot{\omega}_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - C)\omega_Y\omega_Z + \left((r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times k\mathbf{v}_C\right) \cdot \mathbf{e}_X + hF_n e_{zY} \\ -(A - C)\omega_Z\omega_X + \left((r\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \times k\mathbf{v}_C\right) \cdot \mathbf{e}_Y - hF_n e_{zX} \end{pmatrix}$$

ここで、

$$\hat{T} := \begin{pmatrix} 1 + \alpha_{YY}, & -\alpha_{YX} \\ -\alpha_{XY}, & 1 + \alpha_{XX} \end{pmatrix}; \quad \alpha_{XX} := \frac{Mh^2}{A}e_{zX}e_{zX}, \quad \alpha_{XY} := \frac{Mh^2}{A}e_{zX}e_{zY}, \quad \text{etc.}$$

変数： $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z, R_q, x_G, y_G, v_{Gx}, v_{Gy}$

方程式：並進の運動方程式は xyz 系、回転の方程式は XYZ 系で与える。

$$\begin{aligned}
\dot{x}_G &= v_{Gx} \\
\dot{y}_G &= v_{Gy} \\
\dot{v}_{Gx} &= -\frac{k}{M} v_{Cx} \\
\dot{v}_{Gy} &= -\frac{k}{M} v_{Cy} \\
\begin{pmatrix} \dot{\omega}_X \\ \dot{\omega}_Y \end{pmatrix} &= \frac{1}{A} \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} (A-C)\omega_Y\omega_Z - (\mathbf{R}_C \times k\mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{e}_X + hF_{n2}e_{zY} \\ -(A-C)\omega_Z\omega_X - (\mathbf{R}_C \times k\mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{e}_Y - hF_{n2}e_{zX} \end{pmatrix} \\
\dot{\omega}_Z &= \frac{1}{C} (\mathbf{r}\mathbf{e}_z \times k\mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{e}_Z \\
\dot{R}_q &= \frac{1}{2} R_q \omega_q
\end{aligned}$$

中間変数：

$$\begin{aligned}
a_q^x &= R_q a_q^X R_q^{-1}; \quad a_q^x = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad a_q^X = a_X \hat{i} + a_Y \hat{j} + a_Z \hat{k} \\
\mathbf{v}_C &:= \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C \\
\mathbf{R}_C &:= -(\mathbf{r}\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_Z) \\
F_{n2} &:= M(g + h(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_Z)) \cdot \mathbf{e}_z) \\
\hat{T} &:= \begin{pmatrix} 1 + \alpha_{YY}, & -\alpha_{YX} \\ -\alpha_{XY}, & 1 + \alpha_{XX} \end{pmatrix} \\
\alpha_{XX} &:= \frac{Mh^2}{A} e_{zX}e_{zX}, \quad \alpha_{XY} := \frac{Mh^2}{A} e_{zX}e_{zY}, \quad etc.
\end{aligned}$$

物理量：

$$\begin{aligned}
z_G &:= -\mathbf{R}_C \cdot \mathbf{e}_z = r + h e_{zZ} \\
a_q^x &= R_q a_q^X R_q^{-1}; \quad a_q^x = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad a_q^X = a_X \hat{i} + a_Y \hat{j} + a_Z \hat{k}
\end{aligned}$$