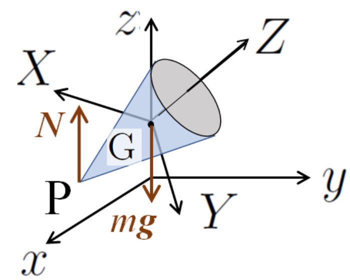
4/6, 2024. Hiizu Nakanishi

# 対称コマのダイナミクス – 軸の先端が床面を動く場合

**運動方程式：**




$$\begin{cases} m\dfrac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} &= -mg\hat{\boldsymbol{e}}_z + \boldsymbol{N} \\ \dfrac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{N} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{r}\times m\left(\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \qquad (1)$$

$\boldsymbol{r}$ は重心 G から軸の先端 P へ向かうベクトル：

$$\boldsymbol{r} := \boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_G = -h\hat{\boldsymbol{e}}_Z, \qquad h := \overline{\mathrm{GP}}$$

ただし、$XYZ$ 座標系はコマに固定された座標系で、$\hat{\boldsymbol{e}}_Z$ は $Z$ 軸（中心軸）方向の単位ベクトル。これを用いると、

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_P + h\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_Z}{dt} = \boldsymbol{v}_P + h\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z, \qquad \boldsymbol{v}_P \in \ xy \text{ 平面} \qquad (2)$$

ただし、軸の先端が床から離れず、点 P は $xy$ 面内を移動するとした。

一般には、$\boldsymbol{v}_P$ が摩擦力、すなわち、$\boldsymbol{N}$ の $xy$ 面内の成分を決めている。$\boldsymbol{v}_P = 0$ とすると、

$$\boldsymbol{v}_G = h\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_Z}{dt} = h\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z$$

となり、中心軸の下端（床との接点）が固定されている場合に帰着する。

**摩擦なしの場合：**　$\boldsymbol{N}$ は鉛直成分のみを持ち、重心 G は水平方向には移動しない。すなわち、$\boldsymbol{v}_G \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_z$ となり、

$$\boldsymbol{v}_G := v_G\,\hat{\boldsymbol{e}}_z; \quad v_G := h\left(\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_Z}{dt}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) = h\Big((\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z\Big)$$

で与えられる。また、

$$\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} := a_G\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = \dot{v}_G\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

なので、運動方程式 (1) は、

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = -hm\big(a_G + g\big)\hat{\boldsymbol{e}}_Z\times\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (3)$$

とかける。剛体固定系 (B 系) での成分で書くと、

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_X - \big(A - C\big)\omega_Y\omega_Z &= +hm\big(a_G + g\big)e_{zY} \\ A\dot{\omega}_Y + \big(A - C\big)\omega_Z\omega_X &= -hm\big(a_G + g\big)e_{zX} \\ C\dot{\omega}_Z &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_Z = \text{const.} \end{cases} \qquad (4)$$

となり、$\omega_Z$ は定数。

ここで、

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} := \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= \frac{d\omega_X}{dt}\,\hat{\boldsymbol{e}}_X + \frac{d\omega_Y}{dt}\,\hat{\boldsymbol{e}}_Y + \frac{d\omega_Z}{dt}\,\hat{\boldsymbol{e}}_Z + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{d\omega_X}{dt}\,\hat{\boldsymbol{e}}_X + \frac{d\omega_Y}{dt}\,\hat{\boldsymbol{e}}_Y + \frac{d\omega_Z}{dt}\,\hat{\boldsymbol{e}}_Z \quad =: \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} \end{aligned}$$

に注意して、

$$
\begin{aligned}
a_G = \dot{v}_G &= h\left(\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z)\right)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
&= h\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_Z}{dt}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
&= h\Big(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z + \boldsymbol{\omega}\times\big(\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z\big)\Big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
&= h\Big(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z + \big(\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_Z\big)\boldsymbol{\omega} - \omega^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_Z\Big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
&= h\Big(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z + \omega_Z\boldsymbol{\omega}_\perp - \omega_\perp^2\hat{\boldsymbol{e}}_Z\Big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z\,; \qquad \boldsymbol{\omega}_\perp := \omega_X\hat{\boldsymbol{e}}_X + \omega_Y\hat{\boldsymbol{e}}_Y \\
&= h\Big(-e_{Yz}\dot{\omega}_X + e_{Xz}\dot{\omega}_Y + e_{Xz}\omega_Z\omega_X + e_{Yz}\omega_Z\omega_Y - \omega_\perp^2 e_{Zz}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
hm(a_G+g) = h^2m\Big(-e_{Yz}\dot{\omega}_X + e_{Xz}\dot{\omega}_Y + e_{Xz}\omega_Z\omega_X + e_{Yz}\omega_Z\omega_Y - \omega_\perp^2 e_{Zz} + g\Big)
$$

これらを用いて、運動方程式を $\omega_X$ と $\omega_Y$ だけの方程式として表すと、

$$
\begin{aligned}
\big(A+mh^2e_{Yz}e_{zY}\big)\dot{\omega}_X - mh^2e_{Xz}e_{zY}\dot{\omega}_Y &= mh^2e_{Xz}e_{zY}\omega_Z\omega_X + \big((A-C)+mh^2e_{Yz}e_{zY}\big)\omega_Z\omega_Y \\
&\quad - mh^2\big(\omega_\perp^2e_{Zz}e_{zY} - (g/h)e_{zY}\big) \\
-mh^2e_{Yz}e_{zX}\dot{\omega}_X + \big(A+mh^2e_{Xz}e_{zX}\big)\dot{\omega}_Y &= -\big((A-C)+mh^2e_{Xz}e_{zX}\big)\omega_Z\omega_X - mh^2e_{Yz}e_{zX}\omega_Z\omega_Y \\
&\quad + mh^2\big(\omega_\perp^2e_{Zz}e_{zX} - (g/h)e_{zX}\big)
\end{aligned}
$$

あるいは、

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1+(mh^2/A)e_{Yz}^2, & -(mh^2/A)e_{Xz}e_{zY} \\ -(mh^2/A)e_{Yz}e_{zX}, & 1+(mh^2/A)e_{Xz}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\omega}_X\\ \dot{\omega}_Y\end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} (mh^2/A)e_{Xz}e_{zY}, & 1-C/A+(mh^2/A)e_{Yz}^2 \\ -\big(1-C/A+(mh^2/A)e_{Xz}^2\big), & -(mh^2/A)e_{Yz}e_{zX} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_Z\omega_X\\ \omega_Z\omega_Y\end{pmatrix} \\
&\qquad + \frac{mh^2}{A}\big(\omega_\perp^2e_{Zz} - (g/h)\big)\begin{pmatrix} -e_{zY}\\ e_{zX}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

行列で表すと、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_\perp = \omega_Z\mathrm{U}\,\boldsymbol{\omega}_\perp + \alpha\left(\omega_\perp^2e_{zZ} - \frac{g}{h}\right)\begin{pmatrix}-e_{zY}\\ e_{zX}\end{pmatrix} \\
&\quad \mathrm{T} := \begin{pmatrix} 1+\alpha_{YY}, & -\alpha_{YX} \\ -\alpha_{XY}, & 1+\alpha_{XX}\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{T}^{-1} := \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} 1+\alpha_{XX}, & \alpha_{YX} \\ \alpha_{XY}, & 1+\alpha_{YY}\end{pmatrix}, \\
&\quad \mathrm{U} := \begin{pmatrix} \alpha_{XY}, & 1-C/A+\alpha_{YY} \\ -\big(1-C/A+\alpha_{XX}\big), & -\alpha_{YX}\end{pmatrix} \\
&\qquad \alpha := \frac{mh^2}{A}, \quad \alpha_{XY} := \frac{mh^2}{A}e_{zX}e_{zY},\ \textit{etc.} \quad \det := (1+\alpha_{YY})(1+\alpha_{XX}) - \alpha_{XY}^2
\end{aligned}
$$

これより、

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\omega}}_\perp = \omega_Z\mathrm{T}^{-1}\mathrm{U}\,\boldsymbol{\omega}_\perp + \alpha\left(\omega_\perp^2e_{zZ} - \frac{g}{h}\right)\mathrm{T}^{-1}\begin{pmatrix}-e_{zY}\\ e_{zX}\end{pmatrix} \\
&\quad \mathrm{T}^{-1}\mathrm{U} = \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} (C/A)\alpha_{XY}, & (1+\alpha_{XX})(1-C/A)+\alpha_{YY} \\ -(1+\alpha_{YY})(1-C/A)-\alpha_{XX}, & -(C/A)\alpha_{XY}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$e_{zX}=e_{Xz}:=\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_X$ などは、$\hat{\boldsymbol{e}}_z$ が時間によらないこと、すなわち、

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_z}{dt}=\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_z=0$$

より求める。

実際の計算では、回転演算の４元数表示を用いているので、

$$\frac{dR}{dt}=\frac{1}{2}R\,\omega_q,\qquad e_{zX}\hat{i}+e_{zY}\hat{j}+e_{zZ}\hat{k}=R^{-1}\hat{k}R$$

から求める。

中心軸と床との接点Ｐの位置ベクトル $\boldsymbol{r}_P$ は、

$$\boldsymbol{r}_P=-h\Big((\hat{\boldsymbol{e}}_Z\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x)\hat{\boldsymbol{e}}_x+(\hat{\boldsymbol{e}}_Z\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y)\hat{\boldsymbol{e}}_y\Big)=-h\big(e_{Zx}\hat{\boldsymbol{e}}_x+e_{Zy}\hat{\boldsymbol{e}}_y\big)$$

$$e_{Zx}\hat{i}+e_{Xy}\hat{j}+e_{Zz}\hat{k}=R\hat{k}R^{-1}$$

で与えられる。

**$\boldsymbol{v}_P$ に比例した摩擦力 $\boldsymbol{F}$ を受ける場合：** 床面に平行な摩擦力 $\boldsymbol{F} := (F_x, F_y, 0)$ が

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -k\boldsymbol{v}_P \\ &= -k\big(\boldsymbol{v}_G - h\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z\big)\end{aligned}$$

で与えられるとする。ただし、$k>0$ は抵抗係数。

運動方程式は

$$\begin{cases} m\dfrac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} &= -mg\hat{\boldsymbol{e}}_z + \boldsymbol{N} \\ \dfrac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{N}\end{cases}$$

ただし、床からの応力 $\boldsymbol{N}$ は摩擦力 $\boldsymbol{F}$ と垂直抗力 $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}; \qquad \boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v}_P \ \perp \hat{\boldsymbol{e}}_z, \quad \boldsymbol{R} \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

からなる。

コマの軸の先端 P が床から離れないとすると、束縛条件は

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_z \ \perp \ \boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_G - h\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z \\ &= \boldsymbol{v}_G - h\big(\omega_Y\hat{\boldsymbol{e}}_X - \omega_X\hat{\boldsymbol{e}}_Y\big)\end{aligned}$$

と表され、

$$\begin{aligned}v_{Gz} &= h\big(\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z\big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \dot{v}_{Gz} &= h\Big(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z + \boldsymbol{\omega}\times\big(\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z\big)\Big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}$$

が成り立つので、垂直抗力は運動方程式より、

$$\begin{aligned}R &= mg + m\dot{v}_{Gz} \\ &= mg + mh\Big({\color{red}\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z} + \boldsymbol{\omega}\times\big(\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{e}}_Z\big)\Big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z \\ &= mg + mh\Big(\dot{\omega}_Y\hat{\boldsymbol{e}}_X - \dot{\omega}_X\hat{\boldsymbol{e}}_Y + \omega_Z\boldsymbol{\omega} - \omega^2\hat{\boldsymbol{e}}_Z\Big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z \\ &= mg + mh\Big(\dot{\omega}_Y e_{Xz} - \dot{\omega}_X e_{Yz} + \omega_Z\big(\omega_X e_{Xz} + \omega_Y e_{Yz} + \omega_Z e_{Zz}\big) - \omega^2 e_{Zz}\Big) \\ &= mg + mh\Big(\dot{\omega}_Y e_{Xz} - \dot{\omega}_X e_{Yz} + \omega_Z\big(\omega_X e_{Xz} + \omega_Y e_{Yz}\big) - \omega_\perp^2 e_{Zz}\Big) \\ &= {\color{red}-mhe_{Yz}\dot{\omega}_X + mhe_{Xz}\dot{\omega}_Y} + {\color{blue}mh\omega_Z\big(e_{Xz}\omega_X + e_{Yz}\omega_Y\big) - mh\omega_\perp^2 e_{Zz} + mg} \\ &=: {\color{red}R_1} + {\color{blue}R_2}\end{aligned}$$

で与えられる。

角運動量の方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = -h\hat{\boldsymbol{e}}_Z\times\boldsymbol{N}; \qquad \boldsymbol{N} = -k\boldsymbol{v}_P + R\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

なので、これを $XYZ$ 成分で表すと、

$$
\begin{aligned}
A\dot{\omega}_X - \big(A-C\big)\omega_Y\omega_Z &= \big(-h\hat{\boldsymbol{e}}_Z \times \boldsymbol{N}\big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_X = -h\big(\hat{\boldsymbol{e}}_X \times \hat{\boldsymbol{e}}_Z\big)\cdot\boldsymbol{N} = h\hat{\boldsymbol{e}}_Y\cdot\boldsymbol{N} \\
&= h\big(-kv_{PY} + N_z e_{Yz}\big) \\
A\dot{\omega}_Y + \big(A-C\big)\omega_Z\omega_X &= \big(-h\hat{\boldsymbol{e}}_Z \times \boldsymbol{N}\big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_Y = -h\big(\hat{\boldsymbol{e}}_Y \times \hat{\boldsymbol{e}}_Z\big)\cdot\boldsymbol{N} = -h\hat{\boldsymbol{e}}_X\cdot\boldsymbol{N} \\
&= -h\big(-kv_{PX} + N_z e_{Xz}\big) \\
C\dot{\omega}_Z &= \big(-h\hat{\boldsymbol{e}}_Z \times \boldsymbol{N}\big)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_Z = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{PX} &= v_{GX} - h\omega_Y = v_{Gx}e_{xX} + v_{Gy}e_{yX} - h\omega_Y \\
v_{PY} &= v_{GY} + h\omega_X = v_{Gx}e_{xY} + v_{Gy}e_{yY} + h\omega_X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}_X - (h/A)R_1 e_{Yz} &= (1-C/A)\omega_Z\omega_Y + (h/A)\big(-kv_{PY} + R_2 e_{Yz}\big)\\
\big(1+\alpha_{YY}\big)\dot{\omega}_X - \alpha_{XY}\dot{\omega}_Y &=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}_Y + (h/A)R_1 e_{Xz} &= -(1-C/A)\omega_Z\omega_X - (h/A)\big(-kv_{PX} + R_2 e_{Xz}\big)\\
-\alpha_{XY}\dot{\omega}_X + \big(1+\alpha_{XX}\big)\dot{\omega}_Y &=
\end{aligned}
$$

行列で表すと、

$$
\mathrm{T}\begin{pmatrix} \dot{\omega}_X \\ \dot{\omega}_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-C/A)\omega_Z\omega_Y + (h/A)\big(-kv_{PY} + R_2 e_{Yz}\big) \\ -(1-C/A)\omega_Z\omega_X - (h/A)\big(-kv_{PX} + R_2 e_{Xz}\big) \end{pmatrix}
$$

すなわち、

$$
\begin{pmatrix} \dot{\omega}_X \\ \dot{\omega}_Y \end{pmatrix} = \mathrm{T}^{-1}\begin{pmatrix} (1-C/A)\omega_Z\omega_Y + (h/A)\big(-kv_{PY} + R_2 e_{Yz}\big) \\ -(1-C/A)\omega_Z\omega_X - (h/A)\big(-kv_{PX} + R_2 e_{Xz}\big) \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{T} := \begin{pmatrix} 1+\alpha_{YY}, & -\alpha_{YX} \\ -\alpha_{XY}, & 1+\alpha_{XX} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{T}^{-1} := \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} 1+\alpha_{XX}, & \alpha_{YX} \\ \alpha_{XY}, & 1+\alpha_{YY} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\det &:= (1+\alpha_{YY})(1+\alpha_{XX}) - \alpha_{XY}^2\\
&= 1 + \alpha_{XX} + \alpha_{YY} = 1 + \alpha - \alpha_{ZZ}\\
&= \frac{A_0}{A} - \alpha_{ZZ}
\end{aligned}
$$

**解くべき方程式：**

- 並進運動：

$$\dot{x}_G = v_{Gx}$$
$$\dot{y}_G = v_{Gy}$$
$$\dot{v}_{Gx} = -\frac{k}{m} v_{Px}$$
$$\dot{v}_{Gy} = -\frac{k}{m} v_{Py}$$

- 角運動量：

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_X \\ \dot{\omega}_Y \end{pmatrix} = \mathrm{T}^{-1} \begin{pmatrix} (1 - C/A)\omega_Z \omega_Y + (h/A)\big( -k v_{PY} + R_2 e_{Yz} \big) \\ -(1 - C/A)\omega_Z \omega_X - (h/A)\big( -k v_{PX} + R_2 e_{Xz} \big) \end{pmatrix}$$

- 回転：

$$\dot{R}_q = \frac{1}{2} R_q \omega_q$$

軸の先端 P の位置：

$$x_P = x_G - h e_{Zx}, \qquad y_P = y_G - h e_{Zy}$$

定義：

$$\mathrm{T} := \begin{pmatrix} 1 + \alpha_{YY}, & -\alpha_{YX} \\ -\alpha_{XY}, & 1 + \alpha_{XX} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{T}^{-1} := \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_{XX}, & \alpha_{YX} \\ \alpha_{XY}, & 1 + \alpha_{YY} \end{pmatrix}$$

$$\det := (1 + \alpha_{YY})(1 + \alpha_{XX}) - \alpha_{XY}^2 = 1 + \alpha_{XX} + \alpha_{YY}$$
$$\alpha := \frac{mh^2}{A}, \quad \alpha_{XY} := \frac{mh^2}{A} e_{zX} e_{zY}, \ etc.$$

$$v_{Px} = v_{Gx} - h\big(\omega_Y e_{Xx} - \omega_X e_{Yx}\big)$$
$$v_{Py} = v_{Gy} - h\big(\omega_Y e_{Xy} - \omega_X e_{Yy}\big)$$

$$v_{PX} = v_{GX} - h\omega_Y = v_{Gx} e_{xX} + v_{Gy} e_{yX} - h\omega_Y$$
$$v_{PY} = v_{GY} + h\omega_X = v_{Gx} e_{xY} + v_{Gy} e_{yY} + h\omega_X$$

$$R_2 = mh\omega_Z \big(e_{Xz}\omega_X + e_{Yz}\omega_Y\big) - mh\omega_\perp^2 e_{Zz} + mg$$