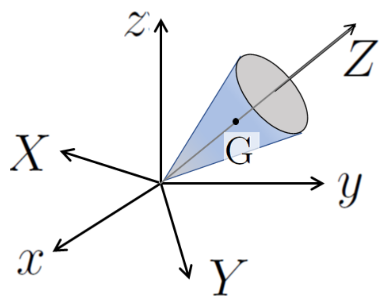
1/29, 2024. Hiizu Nakanishi

対称コマのダイナミクス v.2： 床との接点が固定された場合

Equations of motion:



$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} &= -mg\hat{\boldsymbol{e}}_z + \boldsymbol{N} \\ \dfrac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} &= \left(-\boldsymbol{r}_G\right)\times\boldsymbol{N} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = -\boldsymbol{r}_G\times m\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}+g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)$$

剛体固定系 (B 系) での表現：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_G &:= \frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_G \\ \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{v}_G}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_G = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}\times\boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_G\right) \\ &= \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}\times\boldsymbol{r}_G + \left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_G\right)\boldsymbol{\omega} - \omega^2\boldsymbol{r}_G \end{aligned}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{L}_G}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}_G = \hat{I}_G\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\hat{I}_G\boldsymbol{\omega}\right)$$

剛体固定系での運動方程式

$$\begin{aligned} \hat{I}_G\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\hat{I}_G\boldsymbol{\omega}\right) &= -\boldsymbol{r}_G\times m\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}+g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \\ &= -\boldsymbol{r}_G\times m\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}\times\boldsymbol{r}_G + \left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_G\right)\boldsymbol{\omega} - \omega^2\boldsymbol{r}_G + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \\ &= -m\left(r_G^2\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \left(\boldsymbol{r}_G\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}\right)\boldsymbol{r}_G + \left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_G\right)\boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{r}_G\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\boldsymbol{r}_G = r_G\hat{\boldsymbol{e}}_Z = r_G(0,0,1), \qquad \hat{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

に注意して、剛体固定系での成分で表すと。

$$\begin{aligned} &A\dot{\omega}_X + (C-A)\omega_Y\omega_Z = -m\left(r_G^2\dot{\omega}_X - r_G^2\omega_Z\omega_Y - r_G g\hat{e}_{zY}\right) \\ &A\dot{\omega}_Y + (A-C)\omega_Z\omega_X = -m\left(r_G^2\dot{\omega}_Y + r_G^2\omega_Z\omega_X + r_G g\hat{e}_{zX}\right) \\ &C\dot{\omega}_Z + (A-A)\omega_X\omega_Y = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\omega}_X &= \left(1-\dfrac{C}{A_0}\right)\omega_0\omega_Y + \dfrac{mg\,r_G}{A_0}\hat{e}_{zY} \\ \dot{\omega}_Y &= -\left(1-\dfrac{C}{A_0}\right)\omega_0\omega_X - \dfrac{mg\,r_G}{A_0}\hat{e}_{zX} \\ \omega_Z &= \omega_0 \quad (\text{const.}) \end{cases}$$

ただし、

$$A_0 := A + mr_G^2$$

四元数を用いた方法：任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、R_q を

$$a_q^S = R_q a_q^B R_q^{-1}; \qquad a_q^S := a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \quad a_q^B := a_X\hat{i} + a_Y\hat{j} + a_Z\hat{k}$$

とすると、

$$\frac{dR_q}{dt} = \frac{1}{2}\,R_q\omega_q^B$$

なので、

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{zq}^B &= R_q^{-1}\hat{e}_{zq}^S R_q; \qquad \hat{e}_{zq}^S := \hat{k} \\
&= \big(R_W - R_X\hat{i} - R_Y\hat{j} - R_Z\hat{k}\big)\hat{k}\big(R_W + R_X\hat{i} + R_Y\hat{j} + R_Z\hat{k}\big) \\
&= \big(R_W - R_X\hat{i} - R_Y\hat{j} - R_Z\hat{k}\big)\big(R_W\hat{k} + R_X\hat{j} - R_Y\hat{i} - R_Z\big) \\
&= -R_WR_Z - R_XR_Y + R_YR_X + R_ZR_W \\
&\qquad + \big(- R_WR_Y + R_XR_Z - R_YR_W + R_ZR_X\big)\hat{i} \\
&\qquad\qquad + \big(R_WR_X + R_YR_Z + R_ZR_Y + R_XR_W\big)\hat{j} \\
&\qquad\qquad + \big(R_WR_W + R_ZR_Z - R_XR_X - R_YR_Y\big)\hat{k} \\
&= e_{zX}\hat{i} + e_{zY}\hat{j} + e_{zZ}\hat{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore e_{zX} &= -R_WR_Y + R_XR_Z - R_YR_W + R_ZR_X &&= 2\big(R_XR_Z - R_WR_Y\big) \\
e_{zY} &= R_WR_X + R_YR_Z + R_ZR_Y + R_XR_W &&= 2\big(R_WR_X + R_YR_Z\big) \\
e_{zZ} &= R_WR_W + R_ZR_Z - R_XR_X - R_YR_Y &&= 2\big(R_W^2 + R_Z^2\big) - 1
\end{aligned}$$

解くべき方程式：

$$\dot{\omega}_X = \Delta\omega_0\,\omega_Y + \frac{mg\,r_G}{A_0}\,e_{zY} \tag{1}$$

$$\dot{\omega}_Y = -\Delta\omega_0\,\omega_X - \frac{mg\,r_G}{A_0}\,e_{zX} \tag{2}$$

$$\dot{R}_q = \frac{1}{2}\,R_q\omega_q^B\,; \tag{3}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_0 &:= \left(1 - \frac{C}{A_0}\right)\omega_0 \\
A_0 &:= A + mr_G^2 \\
\omega_q^B &:= \omega_X\hat{i} + \omega_Y\hat{j} + \omega_0\hat{k} \\
e_{zX} &:= \left(R_q^{-1}\hat{k}R_q\right)_{\hat{i}} \\
e_{zY} &:= \left(R_q^{-1}\hat{k}R_q\right)_{\hat{j}}
\end{aligned}$$

対称コマの定常歳差運動

コマが、z 軸から角度 θ 傾いたまま、z 軸のまわりに角速度 Ω で定常歳差運動をしていたとする。x 軸のまわりに角度 θ 回転した後、z 軸のまわりに Ωt 回転している座標軸 $X'Y'Z$ を考える:

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{e}}_{X'} &= \cos\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\
\hat{\boldsymbol{e}}_{Y'} &= \cos\theta\big(-\sin\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\big) - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
\hat{\boldsymbol{e}}_Z &= \sin\theta\big(-\sin\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\big) + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z
\end{aligned}
$$

コマの回転角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は

$$
\boldsymbol{\omega} = \Omega\hat{\boldsymbol{e}}_z + \omega_0'\hat{\boldsymbol{e}}_Z = -\Omega\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{Y'} + \Big(\Omega\cos\theta + \omega_0'\Big)\hat{\boldsymbol{e}}_Z
$$

と表される。ここで、ω_0' は $X'Y'Z$ 座標系とともに動く観測者が見たコマの Z 軸まわりの回転角速度で、$\omega_Z = \omega_0$ より、

$$
\omega_0' = \omega_0 - \Omega\cos\theta
$$

である。

この $\boldsymbol{\omega}$ が、床との接点 O の周りの角運動量 $\boldsymbol{L}_0$ の方程式

$$
\frac{d\boldsymbol{L}_0}{dt} = \boldsymbol{r}_G \times \big(-mg\hat{\boldsymbol{e}}_z\big)
$$

を満たすための条件を求める。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_0 = \hat{I}_0\boldsymbol{\omega} \; &= -A_0\Omega\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{Y'} + C\omega_0\hat{\boldsymbol{e}}_Z \\
\frac{d\boldsymbol{L}_0}{dt} &= -A_0\Omega\sin\theta\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_{Y'} + C\omega_0\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_Z \\
&= -\big(C\omega_0 - A_0\Omega\cos\theta\big)\Omega\,\sin\theta\big(\cos\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\big) \\
\boldsymbol{r}_G \times \big(-mg\hat{\boldsymbol{e}}_z\big) &= -r_G mg\hat{\boldsymbol{e}}_Z \times \hat{\boldsymbol{e}}_z \; = -r_G mg\,\sin\theta\big(\sin\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + \cos\Omega t\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\big)
\end{aligned}
$$

より、定常歳差運動をする条件として、

$$
\left(\frac{C}{A_0} - \cos\theta\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right) = \frac{mgr_G}{A_0\omega_0^2}
$$

が得られる。これを (Ω/ω_0) の 2 次方程式としてみると、

$$
\left(\frac{C}{A_0}\right)^2 > 4\cos\theta\left(\frac{mg\,r_G}{\omega_0^2 A_0}\right) \tag{4}
$$

のとき、可能な定常歳差の角速度に対する解が 2 つあり

$$
\begin{aligned}
\frac{\Omega_\pm}{\omega_0} &= \frac{1}{2\cos\theta}\left(\frac{C}{A_0} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{A_0}\right)^2 - 4\cos\theta\left(\frac{mg\,r_G}{\omega_0^2 A_0}\right)}\right) \qquad (5) \\
&\approx \begin{cases} \dfrac{C}{A_0\cos\theta} \\[2ex] \dfrac{mg\,r_G}{\omega_0^2\,C} \end{cases} \quad \text{for}\ \left(\frac{mg\,r_G}{\omega_0^2\,C}\right)\left(\frac{A_0}{C}\right)\cos\theta \ll 1
\end{aligned}
$$

中間座標系 B′ の導入 2

剛体固定座標系 B でコマの角速度の Z 成分が定数 ω_0 であることに注意して上の方程式を見ると、B 系に対して

$$-\Delta\omega_0 \hat{\boldsymbol{e}}_Z$$

で回転している座標系 B′ を導入すると便利なことが分かる[1]。B′ 系は実験室系 S に対して

$$\boldsymbol{\omega}' := \omega_X \hat{\boldsymbol{e}}_X + \omega_Y \hat{\boldsymbol{e}}_Y + \omega_0' \hat{\boldsymbol{e}}_Z; \qquad \omega_0' := \omega_0 - \Delta\omega_0 = \frac{C}{A_0}\omega_0$$

で回転している。B′ 系の Z' 軸は B 系の Z 軸と等しいので、$\boldsymbol{\omega}'$ を B' 系の成分で表示すると

$$\boldsymbol{\omega}' := \omega_{X'} \hat{\boldsymbol{e}}_{X'} + \omega_{Y'} \hat{\boldsymbol{e}}_{Y'} + \omega_0' \hat{e}_{Z'}$$

となる。

この B′ 系で、コマの運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = -\boldsymbol{r}_G \times m\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)$$

を考える。

コマの対称性から慣性モーメントテンソルは B 系でも B′ 系でも同じで、$\boldsymbol{L}_G$ と重心は

$$\boldsymbol{L}_G = A\big(\omega_{X'}\hat{\boldsymbol{e}}_{X'} + \omega_{Y'}\hat{\boldsymbol{e}}_{Y'}\big) + C\omega_0\hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} := A\boldsymbol{\omega}_\perp + C\omega_0\hat{\boldsymbol{e}}_{Z'}, \qquad \boldsymbol{r}_G = r_g\hat{\boldsymbol{e}}_{Z'}$$

と表されることに注意すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt} &=: \boldsymbol{v}_G = r_G\,\boldsymbol{\omega}' \times \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} \\
\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} = r_G\left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}'}{\partial t}\right)_{B'} \times \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} + \boldsymbol{\omega}' \times \big(\boldsymbol{\omega}' \times \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'}\big)\right) \\
&= r_G\left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_\perp}{\partial t}\right)_{B'} \times \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} + \big(\boldsymbol{\omega}' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'}\big)\,\boldsymbol{\omega}' - \omega'^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_{Z'}\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{L}_G}{\partial t}\right)_{B'} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{L}_G = \hat{I}_G\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}\right)_{B'} + C\left(1 - \frac{A}{A_0}\right)\omega_0\,\boldsymbol{\omega}_\perp \times \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'}$$

と表される。これらを用いて、運動方程式をあらわすと

$$\begin{aligned}
&\hat{I}_G\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}\right)_{B'} + C\left(1 - \frac{A}{A_0}\right)\omega_0\,\boldsymbol{\omega}_\perp \times \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} \\
&\qquad = -mr_G^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} \times \left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_\perp}{\partial t}\right)_{B'} \times \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} + \big(\boldsymbol{\omega}' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'}\big)\,\boldsymbol{\omega}' - \omega'^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \\
&\qquad = -mr_G^2\left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_\perp}{\partial t}\right)_{B'} + \big(\boldsymbol{\omega}' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{Z'}\big)\big(\hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} \times \boldsymbol{\omega}'\big) + g\big(\hat{\boldsymbol{e}}_{Z'} \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\big)\right)
\end{aligned}$$

となる。$mr_G^2 = A_0 - A$ に注意して、これを B′ 系の成分で表すと、

$$\begin{cases}
\dfrac{d\omega_{X'}}{dt} &= +\dfrac{mr_G g}{A_0}\,\hat{e}_{zY'} \\
\dfrac{d\omega_{Y'}}{dt} &= -\dfrac{mr_G g}{A_0}\,\hat{e}_{zX'}
\end{cases}$$

を得る。

[1] ここで導入する B′ 座標系は、前のページで導入した $X'Y'Z$ 系と異なることに注意。また、下の式で定義する ω_0' も前ページの ω_0' とは異なる。

解くべき方程式２

回転変換四元数：任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分に対して

$$A_q^S = R_q' A_Q^{B'} R_q'^{-1}, \qquad A_q^S = R_q A_Q^B R_q^{-1}, \qquad A_q^{B'} = R_q^0 A_q^B R_q^{0-1} \quad \Rightarrow \quad R_q = R_q' R_q^0$$

回転変換四元数の満たすべき方程式：

$$\begin{aligned}
\frac{dR_q'}{dt} &= \frac{1}{2} R_q' \omega_q' \,; \qquad \omega_q' := \omega_{X'}\hat{i} + \omega_{Y'}\hat{j} + \omega_0'\hat{k} \,, \quad \omega_0' := \frac{C}{A_0}\omega_0 \\
\frac{dR_q}{dt} &= \frac{1}{2} R_q \omega_q \,; \qquad \omega_q := \omega_X\hat{i} + \omega_Y\hat{j} + \omega_0\hat{k} \\
R_q^0 &= \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega_0 t\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega_0 t\right)\hat{k}; \quad \Delta\omega_0 := \left(1 - \frac{C}{A_0}\right)\omega_0
\end{aligned}$$

$\hat{\boldsymbol{e}}_z$ の成分：

$$e_{zq}^S = R_q' e_{zq}^{B'} R_q'^{-1}, \quad e_{zq}^S = \hat{k} \qquad \Rightarrow \qquad e_{zq}^{B'} = R_q'^{-1}\hat{k}R_q'$$

$$\therefore \quad e_{zX'} = \left(R_q'^{-1}\hat{k}R_q'\right)_{\hat{i}}, \qquad e_{zY'} = \left(R_q'^{-1}\hat{k}R_q'\right)_{\hat{j}}.$$

方程式：

$$\frac{d\omega_{X'}}{dt} = +\frac{mr_G g}{A_0}\,\hat{e}_{zY'} \tag{6}$$

$$\frac{d\omega_{Y'}}{dt} = -\frac{mr_G g}{A_0}\,\hat{e}_{zX'} \tag{7}$$

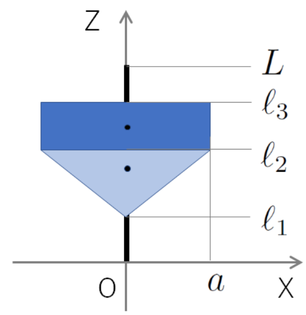
$$\begin{aligned}
e_{zX'} &= \left(R_q'^{-1}\hat{k}R_q'\right)_{\hat{i}} \\
e_{zY'} &= \left(R_q'^{-1}\hat{k}R_q'\right)_{\hat{j}}
\end{aligned}$$

$$\frac{dR_q'}{dt} = \frac{1}{2} R_q' \omega_q' \,; \qquad \omega_q' := \omega_{X'}\hat{i} + \omega_{Y'}\hat{j} + \omega_0'\hat{k} \,, \quad \omega_0' := \frac{C}{A_0}\omega_0 \tag{8}$$

$$R_q = R_q' R_q^0 \,; \qquad R_q^0 = \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega_0 t\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega_0 t\right)\hat{k};$$

$$\Delta\omega_0 := \left(1 - \frac{C}{A_0}\right)\omega_0$$

コマの慣性モーメントテンソル



円柱部：半径 a、高さ $\ell_3 - \ell_2$

$$\begin{aligned} r_{G1} &= \frac{1}{2}(\ell_3 + \ell_2) \\ M_1 &= \rho V_1 \\ V_1 &= \pi a^2(\ell_3 - \ell_2) \\ A_1 &= \frac{1}{4}\left(a^2 + \frac{1}{3}(\ell_3 - \ell_2)^2\right) M_1 \\ C_1 &= \frac{1}{2} M_1 a^2 \end{aligned}$$

円錐部：半径 a、高さ $\ell_2 - \ell_1$

$$\begin{aligned} r_{G2} &= \frac{1}{4}(3\ell_2 + \ell_1) \\ M_2 &= \rho V_2 \\ V_2 &= \frac{1}{3}\pi a^2(\ell_2 - \ell_1) \\ A_2 &= \frac{3}{20}\left(a^2 + \frac{1}{4}(\ell_2 - \ell_1)^2\right) M_2 \\ C_2 &= \frac{3}{10} M_2 a^2 \end{aligned}$$

コマ全体：パラメーター：$L = 1,\ \ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ a, \quad \rho = 1$

$$\begin{aligned} r_G &= \frac{M_1 r_{G1} + M_2 r_{G2}}{M_1 + M_2} \\ M &= M_1 + M_2 \\ C &= C_1 + C_2 \\ A_0 &= A_1 + M_1 r_{G1}^2 + A_2 + M_2 r_{G2}^2 \end{aligned}$$