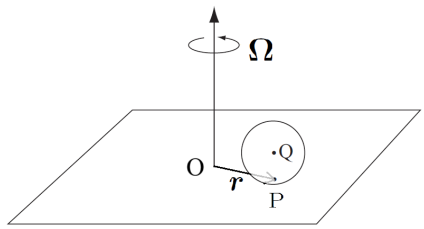
2024/9, Hiizu Nakanishi

回転テーブル上で転がる球



回転軸と平面の交点をO、球と平面の接点をP、ベクトル $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする。点Pで球が床から受ける力は垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ と平面内の摩擦力 $\boldsymbol{F}$ であるが、球は水平面上を運動するので、垂直抗力は重力と打ち消す。従って、球の並進運動の方程式および回転運動の方程式は

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}, \qquad I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -a\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{F} \tag{A}$$

となる。ここで、鉛直上向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とした。

球が水平面上を滑らない条件（滑りなし条件）は、点Pで接している球面上の点の速度 $\boldsymbol{v}'_P$ が[1]、床の回転運動の速度 $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ に等しい、すなわち

$$\boldsymbol{v}'_P = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

で与えられるが、速度 $\boldsymbol{v}'_P$ は球の中心速度 $\boldsymbol{v}_Q$ を用いて

$$\boldsymbol{v}'_P = \boldsymbol{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (-a\boldsymbol{e}_z)$$

で与えられ、$\boldsymbol{v}_Q = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ なので、滑りなし条件は

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (-a\boldsymbol{e}_z) \tag{B}$$

で与えられる。

式 (A) から $\boldsymbol{F}$ を消去すると、

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\frac{Ma}{I}\boldsymbol{e}_z \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

が得られ、式 (B) を時間微分したものにこれを代入すると、

$$\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + \frac{Ma^2}{I}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

が得られる。ここで、$\boldsymbol{e}_z \perp (d^2\boldsymbol{r}/dt^2)$ を用いた。$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{e}_z$ に注意すると、これは

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \Omega'\,\boldsymbol{e}_z \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}; \qquad \Omega' := \frac{1}{1 + Ma^2/I}\,\Omega$$

となる。$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} := (v_x, v_y, 0)$ として、この式を成分で書くと、

$$\dot{v}_x = -\Omega' v_y, \qquad \dot{v}_y = \Omega' v_x$$

[1] 点Pで接している球面の点の速度 v'_P は点Pの移動速度 $d\boldsymbol{r}/dt$ ではないことに注意。点Pの移動速度は点Qの移動速度 $\boldsymbol{v}_Q$ に等しい。

となり、これらを解くと、

$$v_x = -A\sin(\Omega' t + \phi), \qquad v_y = A\cos(\Omega' t + \phi)$$

をえる。ただし、A および ϕ は積分定数。さらにもう一度積分すると

$$x = \frac{A}{\Omega'}\cos(\Omega' t + \phi) + x_0, \qquad y = \frac{A}{\Omega'}\sin(\Omega' t + \phi) + y_0$$

となり、これは角速度 $\Omega' = (2/7)\Omega$ の円運動を表す。

解くべき方程式をまとめると、状態は $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}, R_q)$ で与えられ、

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{v} \\
\dot{\boldsymbol{v}} &= \frac{I}{I + Ma^2}\,\Omega\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{v} \\
\dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\frac{Ma}{I}\,\boldsymbol{e}_z \times \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{Ma}{I + Ma^2}\,\Omega\,\boldsymbol{v} \\
\dot{R}_q^B &= \frac{1}{2}R_q^B\,\omega_q^B = \frac{1}{2}\omega_q^S R_q^B \qquad \because\ \omega_q^S = R_q^B \omega_q^B (R_q^B)^{-1}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{e}_z \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \text{const.}$$

で、no slip 条件より、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_z \times \big(\Omega\,\boldsymbol{r} - a\,\boldsymbol{\omega}\big) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x &= -\Omega\,y + a\,\omega_y \\ v_y &= +\Omega\,x - a\,\omega_x \end{cases}$$

[参考] 回転テーブル上の球の運動のビデオが YouTube の
https://youtu.be/3oM7hX3UUEU?si=0OsjG2r1wXOBNyt2
にあります。