

転がるリングのダイナミクス

水平なテーブルの上を滑らずに転がる幅のあるリングの運動を考えよう。この“滑らずに転がる”という拘束条件は座標の関数で表せない条件で、非ホロノミックな拘束条件と呼ばれ、リングの運動を複雑なものにする。

系を特徴づけるパラメタは、質量 M と重心回りの慣性モーメントテンソル $\hat{I}$ 、リングの外半径 a 、内半径 b 、幅 h 、および重力定数 g である。

1 運動方程式

運動方程式は、リングの重心速度 $\mathbf{v}_G$ およびリングの角速度 $\boldsymbol{\omega}$ として、

$$M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = M\mathbf{g} + \mathbf{R} \quad \text{並進運動} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{c} \times \mathbf{R} \quad \text{回転運動} \quad (2)$$

の2つのベクトル方程式で表される。ここで、 $\mathbf{g}$ は重力加速度ベクトルで大きさ g の鉛直下向き、 $\mathbf{R}$ は床からの抗力、ベクトル $\mathbf{c}$ はリングの重心からリングと床の接触点へ向かうベクトルである。

滑らずに転がるという束縛条件は重心速度 $\mathbf{v}_G$ と角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の関係式

$$\mathbf{v}_G = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c} \quad \text{滑りなし条件} \quad (3)$$

で与えられ、座標や角度の間の関係式として表せないのが、非ホロノミック条件である。

式(1)と(2)とから $\mathbf{R}$ を消去し、式(3)を用いて $\mathbf{v}_G$ を $\boldsymbol{\omega}$ で表すと、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(\hat{I}\boldsymbol{\omega}) = M\mathbf{c} \times \left(-\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) - \mathbf{g} \right) \quad (4)$$

となる。

2 座標系

ここで、2つの座標系 xyz と XYZ を導入する：

- (i) xyz 系：空間固定座標系。水平な床面を $z-x$ 平面、鉛直上向きを y 軸にとる。
- (ii) XYZ 系：原点をリング重心に取り、 Z 軸はリングに垂直、 X 軸は水平面内、 Y 軸はリング面内上向き。

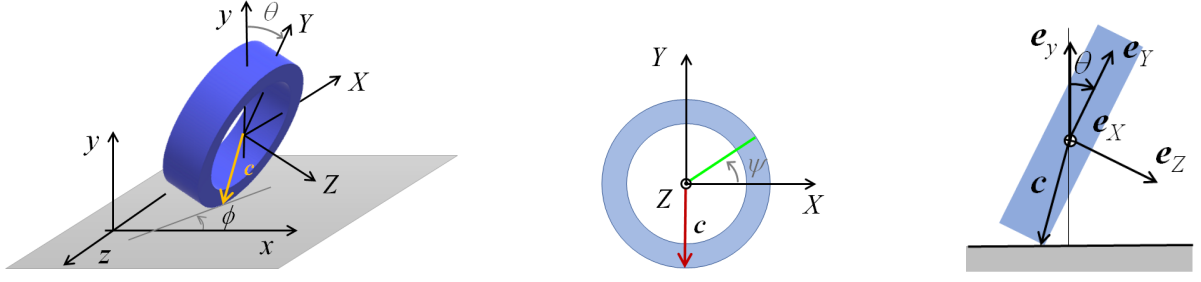


図 1: 2つの座標系 xyz 系および XYZ 系とリングの向きを表す3つの角度 (θ, ϕ, ψ) (左図)。 Z 軸方向から見た図 (中央) と、 $-X$ 軸方向から見た図 (右図)。 $(\theta, \phi) = 0$ のとき2つの座標系は一致する。

基底ベクトル、即ち、それぞれの軸に平行な単位ベクトルを

$$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z), \quad (\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z) \quad (5)$$

とする。 $\mathbf{e}_X$ と $\mathbf{e}_Y$ は

$$\mathbf{e}_X \equiv \frac{\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z|}, \quad \mathbf{e}_Y \equiv \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_X \quad (6)$$

ととる。

更に、リングの向きを表す3つの角度 (θ, ϕ, ψ) を定義する。すなわち、 $(\theta, \phi, \psi) = 0$ のときリングは $x-y$ 面内にあり XYZ 軸は xyz 軸にそれぞれ平行となる。 (θ, ϕ, ψ) 向きのリングは $(\theta, \phi, \psi) = 0$ の向きから

1. z 軸回りに ψ 回転
2. x 軸回りに θ 回転
3. y 軸回りに ϕ 回転

することによって得られる。

すると、基底ベクトルの関係は、直交行列 $\hat{R}(\theta, \phi)$

$$\hat{R}(\theta, \phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi, & 0, & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi, & \cos \theta, & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi, & -\sin \theta, & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} = \hat{R}(x, \theta) \hat{R}(y, \phi) \quad (7)$$

$$\hat{R}^t(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi, & \sin \theta \sin \phi, & \cos \theta \sin \phi \\ 0, & \cos \theta, & -\sin \theta \\ -\sin \phi, & \sin \theta \cos \phi, & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} = \hat{R}^{-1}(\theta, \phi) \quad (8)$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_X \\ \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_Z \end{pmatrix} = \hat{R}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \hat{R}^t(\theta, \phi) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_X \\ \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_Z \end{pmatrix} \quad (9)$$

で与えられる。ここで、 $\hat{R}(x, \theta)$ および $\hat{R}(y, \phi)$ はそれぞれ x 軸回りに θ 回転、 y 軸回りに ϕ 回転する行列

$$\hat{R}(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos \theta, & \sin \theta \\ 0, & -\sin \theta, & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{R}(y, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi, & 0, & -\sin \phi \\ 0, & 1, & 0 \\ \sin \phi, & 0, & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (10)$$

である。

XYZ 座標系の回転角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$ 、リングの回転角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすると、

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_y + \dot{\theta} \mathbf{e}_x, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_y + \dot{\theta} \mathbf{e}_x + \dot{\psi} \mathbf{e}_z \quad (11)$$

で与えられる。

3 XYZ 系での運動方程式

運動方程式を XYZ 系の基底ベクトルで表す。

任意のベクトル $\mathbf{u}$ に対して XYZ 系でベクトル成分を時間微分したものを

$$\dot{\mathbf{u}} \equiv \frac{du_X}{dt} \mathbf{e}_X + \frac{du_Y}{dt} \mathbf{e}_Y + \frac{du_Z}{dt} \mathbf{e}_Z.$$

と定義すると、 XYZ 系は角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で運動しているので、 $\mathbf{u}$ の時間微分は

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$$

と表される。

XYZ 系では、中空円柱の慣性モーメントテンソルは

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}M(a^2 + b^2 + h^2/3), & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4}M(a^2 + b^2 + h^2/3), & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}M(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{XYZ} \quad (12)$$

と与えられる。接点ベクトル $\mathbf{c}$ と重力加速度ベクトル $\mathbf{g}$ は

$$\mathbf{c} = -a\mathbf{e}_Y + \frac{1}{2}h\mathbf{e}_Z \text{sign}(\theta), \quad \mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$$

なので、運動方程式 (4) は

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) = M\mathbf{c} \times \left(-\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{c} + \boldsymbol{\Omega} \times (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) + g\mathbf{e}_y \right)$$

これより、

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + M\mathbf{c} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{c}) = -\boldsymbol{\Omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) - M(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} \times \boldsymbol{\omega} + Mgc \times \mathbf{e}_y$$

左辺は、

$$\begin{aligned} & (\hat{I} + Mc^2)\dot{\boldsymbol{\omega}} - M(\mathbf{c} : \mathbf{c})\dot{\boldsymbol{\omega}} =: \hat{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \hat{J} := & \begin{pmatrix} I_X + Mc^2, & 0, & 0 \\ 0, & I_Y + M(c^2 - a^2), & +\frac{1}{2}ah \operatorname{sign} \theta \\ 0, & +\frac{1}{2}ah \operatorname{sign} \theta, & I_Z + M(c^2 - \frac{1}{4}h^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表されるので、解くべき方程式は

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \hat{J}^{-1} \left(-\boldsymbol{\Omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega}) - M(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} \times \boldsymbol{\omega} + Mgc \times \mathbf{e}_y \right) \quad (13)$$

となる。一方、 XYZ 座標系から xyz 座標系へベクトル成分を変換する四元数 R_q は方程式

$$\frac{dR_q}{dt} = \frac{1}{2} R_q \Omega_q; \quad \Omega_q := \Omega_X \hat{i} + \Omega_Y \hat{j} + \Omega_Z \hat{k} \quad (14)$$

で与えられる。

回転角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と、 XYZ 座標系の回転角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ の関係は

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi} \mathbf{e}_Z; \quad \text{即ち} \quad \omega_X = \Omega_X, \quad \omega_Y = \Omega_Y, \quad \omega_Z = \Omega_Z + \dot{\psi}$$

と与えられ、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と方位角 (θ, ϕ, ψ) との関係は、式 (11) より、

$$\omega_X = \dot{\theta}, \quad \omega_Y = \dot{\phi} \cos \theta, \quad \omega_Z = \dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \omega_Z + \tan \theta \omega_Y$$

なので、

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} - \dot{\psi} \mathbf{e}_Z = \boldsymbol{\omega} - (\omega_Z + \tan \theta \omega_Y) \mathbf{e}_Z \quad (15)$$

をえる。

ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の XYZ 座標での成分は

$$e_{xX} \hat{i} + e_{xY} \hat{j} + e_{xZ} \hat{k} = R_q^{-1} \hat{i} R_q, \quad e_{yX} \hat{i} + e_{yY} \hat{j} + e_{yZ} \hat{k} = R_q^{-1} \hat{j} R_q$$

で与えられ、 θ, ϕ は

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_X = \cos \phi, \quad (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_X) \cdot \mathbf{e}_y = (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_X = -\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_X = \sin \phi$$

$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_Y = \cos \theta, \quad (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_Y) \cdot \mathbf{e}_X = (\mathbf{e}_Y \times \mathbf{e}_X) \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{e}_y = \sin \theta$$

より求まる。

4 物理量

重心速度と重心位置

$$\frac{d\mathbf{r}_G}{dt} = \mathbf{v}_G = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}$$

床との接点

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_G + \mathbf{c}$$

エネルギー

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t \hat{I} \boldsymbol{\omega} + Mg(-\mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_y$$

抗力

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} + Mg\mathbf{e}_y = -M \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) + Mg\mathbf{e}_y \\ &= -M(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{c} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})) + Mg\mathbf{e}_y \end{aligned}$$

$$F \equiv \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$N \equiv R_y = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_y$$

5 床との接点でスリップがある場合

運動方程式：

$$\begin{cases} M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = M\mathbf{g} + \mathbf{R}; & \mathbf{g} := -g\mathbf{e}_y \\ \frac{d}{dt}(\hat{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{c} \times \mathbf{R} \end{cases}$$

ここで $\mathbf{R}$ は床からの抗力で、スリップによる抵抗力 $\mathbf{F}$ と垂直抗力 $\mathbf{N}$ に分けられる；

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{N}; \quad \mathbf{F} \perp \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{N} \parallel \mathbf{e}_y$$

$\mathbf{F}$ はスリップ条件より求まる：

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{v}_{\text{slip}}$$

ここでスリップ速度 $\mathbf{v}_{\text{slip}}$ は、床とリングの接点 C に一致する瞬間の リングに固定された点 C' の速度である。これは、接点 C の移動速度とは異なることに注意。

重心の位置ベクトルを $\mathbf{r}_G$ 、接点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_C$ とすると、点 C と C' が一致した瞬間、関係式

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_C + \overrightarrow{CG} = \mathbf{r}_{C'} + \overrightarrow{C'G}$$

が成り立つ。その瞬間に速度 $\mathbf{v}_{\text{slip}}$ で並進運動する座標系 S' から見ると、リング上に固定された点 C' は静止しており、リングは角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているので、S' 系における重心 G の速度は

$$\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{C'G} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}$$

で与えられる。ここで、点 C と C' が一致した瞬間には $\overrightarrow{C'G} = -\mathbf{c}$ であることを用いた。それ故、実験室系から見た重心の速度は

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_{\text{slip}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}$$

と与えられる。

垂直抗力 $\mathbf{N}$ は、床との接点がいつも床に接しているという条件

$$\mathbf{v}_{\text{slip}} \cdot \mathbf{e}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{Gy} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_y$$

と並進運動方程式の鉛直 ($\mathbf{e}_y$) 成分より、

$$\begin{aligned} N = M\dot{v}_{Gy} + Mg &= -M\left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{c} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})\right) \cdot \mathbf{e}_y + Mg \\ &= -M\left((\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})) \cdot \mathbf{e}_y - g\right) \end{aligned}$$

と表される。ただし、 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ は剛体固定系 (XYZ 座標系) での成分表示されたベクトルであることに注意。

抗力 $\mathbf{R}$ に対するこれらの表現を用いて、回転運動の方程式は

$$\begin{aligned}\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \hat{I}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{c} \times \mathbf{R} = \mathbf{c} \times (-k\mathbf{v}_{\text{slip}} + N\mathbf{e}_y) \\ &= \mathbf{c} \times \left(-k\mathbf{v}_{\text{slip}} - M \left((\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})) \cdot \mathbf{e}_y - g \right) \mathbf{e}_y \right)\end{aligned}$$

$$\left(\hat{I} + M(\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y) : (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y)^t \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\Omega} \times \hat{I}\boldsymbol{\omega} - k\mathbf{c} \times \mathbf{v}_{\text{slip}} - M \left((\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})) \cdot \mathbf{e}_y - g \right) (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y)$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \hat{J}^{-1} \left(-\boldsymbol{\Omega} \times \hat{I}\boldsymbol{\omega} - k\mathbf{c} \times \mathbf{v}_{\text{slip}} - M \left((\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})) \cdot \mathbf{e}_y - g \right) (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y) \right) \\ \text{ただし } \hat{J} &:= \hat{I} + \left(M(\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y)_i (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y)_j \right)\end{aligned}$$

解くべき方程式：

$$\dot{R}_q = \frac{1}{2} R_q \Omega_q,$$

$$\dot{x}_G = v_{Gx},$$

$$\dot{y}_G = v_{Gy} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_y,$$

$$\dot{z}_G = v_{Gz},$$

$$M\dot{v}_{Gx} = F_x = -k\mathbf{v}_{\text{slip},x},$$

$$M\dot{v}_{Gz} = F_z = -k\mathbf{v}_{\text{slip},z},$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \hat{J}^{-1} \left(-\boldsymbol{\Omega} \times \hat{I}\boldsymbol{\omega} - k\mathbf{c} \times \mathbf{v}_{\text{slip}} - M \left((\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})) \cdot \mathbf{e}_y - g \right) (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y) \right) - \alpha|\dot{\psi}|\boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\psi} = \omega_Z + \tan \theta \omega_Y$$

ただし、 $-\alpha|\dot{\psi}|\boldsymbol{\omega}$ の項は、現象論的に入れた散逸項。

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} - (\omega_Z + \tan \theta \omega_Y) \mathbf{e}_Z$$

$$\mathbf{c} = -a\mathbf{e}_Y + \frac{1}{2}h\mathbf{e}_Z \text{sign}(\theta)$$

$$\mathbf{v}_{\text{slip}} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c},$$

$$\hat{J}_{ij} := \hat{I}_{ij} + M(\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y)_i (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_y)_j,$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_X = \cos \phi, \quad -\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_X = \sin \phi,$$

$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_Y = \cos \theta, \quad -\mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{e}_Y = \sin \theta$$

注意： $\mathbf{v}_{\text{slip}}$ は、 $\dot{\mathbf{v}}_G$ の式の中では xyz 座標成分、 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ の式の中では XYZ 成分で表されているものとする。

リングの向き： $(\theta, \phi, \psi) = 0$ のときは、リングは $x-z$ 面内で Z 軸は y 軸と逆向きに向いている。その状態のリングを (θ, ϕ, ψ) の向きにするには

1. z 軸回りに ψ 回転
2. x 軸回りに θ 回転
3. y 軸回りに ϕ 回転

すればよい。

$\mathbf{n}$ 軸方向に θ 回転する、4 元数を用いた回転演算子 $\hat{R}$ は、

$$\hat{R}(\mathbf{n}, \theta) = \cos \frac{\theta}{2} + \hat{n} \sin \frac{\theta}{2}; \quad \hat{n} \equiv n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$$

で与えられるので、この回転を表す演算子 $\hat{R}$ は

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \hat{R}(\mathbf{e}_y, \phi) \hat{R}(\mathbf{e}_x, \theta) \hat{R}(\mathbf{e}_z, \psi) \\ \hat{R}(\mathbf{e}_z, \psi) &= \cos \frac{\psi}{2} + \hat{k} \sin \frac{\psi}{2} \\ \hat{R}(\mathbf{e}_x, \theta) &= \cos \frac{\theta}{2} + \hat{i} \sin \frac{\theta}{2} \\ \hat{R}(\mathbf{e}_y, \phi) &= \cos \frac{\phi}{2} + \hat{j} \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

で与えられる。

ただし、4 元数とは $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 、および 1 を基底とする複素数を拡張したもので、基底は演算規則

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1, \quad \hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i} = \hat{k}, \quad \hat{j}\hat{k} = -\hat{k}\hat{j} = \hat{i}, \quad \hat{k}\hat{i} = -\hat{i}\hat{k} = \hat{j}$$

に従う。