2022/2, Hiizu Nakanishi

転がるコインのダイナミクス

水平なテーブルの上を滑らずに転がるコインの運動を考えよう。この “滑らずに転がる” という拘束条件は座標の関数で表せない条件で、非ホロノミックな拘束条件と呼ばれ、コインの運動を複雑なものにする。

系を特徴づけるパラメタは、質量 M と重心回りの慣性モーメントテンソル $\hat{I}$、コインの半径 a、および重力定数 g である。

1 運動方程式

運動方程式は、コインの重心速度 $\boldsymbol{v}$ およびコインの角速度 $\boldsymbol{\omega}$ として、

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} \qquad \text{並進運動} \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\Big) = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{R} \qquad \text{回転運動} \tag{2}$$

の２つのベクトル方程式で表される。ここで、$\boldsymbol{g}$ は重力加速度ベクトルで大きさ g の鉛直下向き、$\boldsymbol{R}$ は床からの抗力、ベクトル $\boldsymbol{c}$ はコインの中心からコインと床の接触点へ向かうベクトルである。

滑らずに転がるという束縛条件は重心速度 $\boldsymbol{v}$ と角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の関係式

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c} \qquad \text{滑りなし条件} \tag{3}$$

で与えられ、座標や角度の間の関係式として表せないので、非ホロノミック条件である。

式 (1) と (2) とから $\boldsymbol{R}$ を消去し、式 (3) を用いて $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{\omega}$ で表すと、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\Big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\Big) = M\boldsymbol{c}\times\left(-\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{g}\right) \tag{4}$$

となる。

2 座標系

ここで、２つの座標系 xyz と XYZ を導入する：

(i) xyz 系：空間固定座標系。水平な床面を $z-x$ 平面、鉛直上向きを y 軸にとる。

(ii) XYZ 系：原点をコイン中心に取り、Z 軸はコインに垂直、X 軸は水平面内、Y 軸はコイン面内上向き。

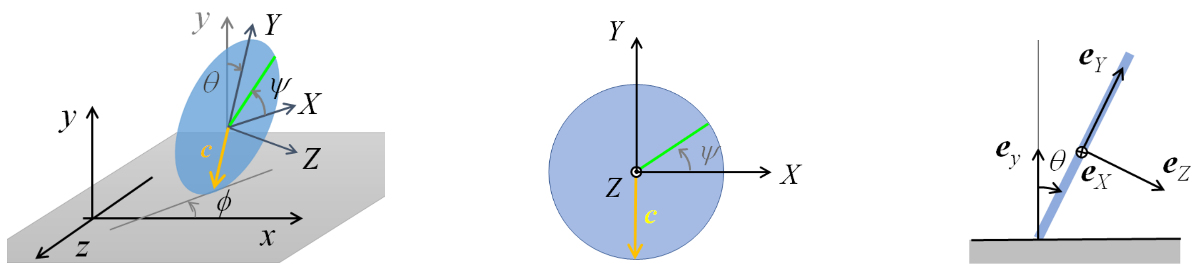

図 1: 2つの座標系 xyz 系および XYZ 系とコインの向きを表す3つの角度 (θ, ϕ, ψ)（左図)。Z 軸方向から見た図（中央）と、$-X$ 軸方向から見た図（右図)。$(\theta, \phi) = 0$ のとき2つの座標系は一致する。

基底ベクトル、即ち、それぞれの軸に平行な単位ベクトルを

$$
\big(\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z\big), \qquad \big(\boldsymbol{e}_X,\ \boldsymbol{e}_Y,\ \boldsymbol{e}_Z\big) \tag{5}
$$

とする。$\boldsymbol{e}_X$ と $\boldsymbol{e}_Y$ は

$$
\boldsymbol{e}_X \equiv \frac{\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_Z}{|\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_Z|}, \quad \boldsymbol{e}_Y \equiv \boldsymbol{e}_Z \times \boldsymbol{e}_X \tag{6}
$$

ととる。

更に、コインの向きを表す3つの角度 (θ, ϕ, ψ) を定義する。すなわち、$(\theta, \phi, \psi) = 0$ のときコインは $x - y$ 面内にあり XYZ 軸は xyz 軸にそれぞれ平行となる。(θ, ϕ, ψ) 向きのコインは $(\theta, \phi, \psi) = 0$ の向きから

1. z 軸回りに ψ 回転
2. x 軸回りに θ 回転
3. y 軸回りに ϕ 回転

することによって得られる。

すると、基底ベクトルの関係は、直交行列 $\hat{R}(\theta, \phi)$

$$
\hat{R}(\theta, \phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\phi, & 0, & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi, & \cos\theta, & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi, & -\sin\theta, & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} = \hat{R}(x, \theta)\hat{R}(y, \phi) \tag{7}
$$

$$
\hat{R}^t(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi, & \sin\theta\sin\phi, & \cos\theta\sin\phi \\ 0, & \cos\theta, & -\sin\theta \\ -\sin\phi, & \sin\theta\cos\phi, & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} = \hat{R}^{-1}(\theta, \phi) \tag{8}
$$

を用いて

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_X \\ \boldsymbol{e}_Y \\ \boldsymbol{e}_Z \end{pmatrix} = \hat{R}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \hat{R}^t(\theta, \phi) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_X \\ \boldsymbol{e}_Y \\ \boldsymbol{e}_Z \end{pmatrix} \tag{9}
$$

で与えられる。ここで、$\hat{R}(x,\theta)$ および $\hat{R}(y,\phi)$ はそれぞれ x 軸回りに θ 回転、y 軸回りに ϕ 回転する行列

$$\hat{R}(x,\theta) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos\theta, & \sin\theta \\ 0, & -\sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \hat{R}(y,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi, & 0, & -\sin\phi \\ 0, & 1, & 0 \\ \sin\phi, & 0, & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{10}$$

である。

XYZ 座標系の回転角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$、コインの回転角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすると、

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_y + \dot{\theta}\boldsymbol{e}_X, \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_y + \dot{\theta}\boldsymbol{e}_X + \dot{\psi}\boldsymbol{e}_Z \tag{11}$$

で与えられる。

3　XYZ 系での運動方程式

運動方程式を XYZ 系の基底ベクトルで表す。

任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して XYZ 系でベクトル成分を時間微分したものを

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \equiv \frac{du_X}{dt}\boldsymbol{e}_X + \frac{du_Y}{dt}\boldsymbol{e}_Y + \frac{du_Z}{dt}\boldsymbol{e}_Z.$$

と定義すると、$\boldsymbol{u}$ の時間微分は

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u}$$

と表される。

XYZ 系では、慣性モーメントテンソルは

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}Ma^2, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4}Ma^2, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}Ma^2 \end{pmatrix}_{XYZ} \tag{12}$$

と与えられる。接点ベクトル $\boldsymbol{c}$ と重力加速度ベクトル $\boldsymbol{g}$ は

$$\boldsymbol{c} = -a\boldsymbol{e}_Y, \qquad \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$$

なので、運動方程式 (4) は

$$\hat{I}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}\right) + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\right) = M\boldsymbol{c}\times\left(-\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Omega}\times\left(-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c}\right) + g\boldsymbol{e}_y\right)$$

これを整理して、

$$\hat{I}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}\right) + Ma^2\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \frac{\partial \omega_Y}{\partial t}\boldsymbol{e}_Y\right) = -\boldsymbol{\Omega}\times\left(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\right) - Ma^2\left(\Omega_Y\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_Y + \frac{g}{a}\boldsymbol{e}_Y\times\boldsymbol{e}_y\right)$$

を得る。回転角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は、XYZ 座標系の回転角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ と

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{e}_Z\,; \qquad \text{即ち} \quad \omega_X = \Omega_X, \quad \omega_Y = \Omega_Y, \quad \omega_Z = \Omega_Z + \dot{\psi} \tag{13}$$

と与えられるので、運動方程式の XYZ 系での成分を書き下すと

$$\big(I_X + Ma^2\big)\frac{d\omega_X}{dt} = -\big(I_Z + Ma^2\big)\omega_Y\omega_Z - I_X\omega_Y^2\tan\theta + Ma^2\frac{g}{a}\sin\theta \tag{14}$$

$$I_X\frac{d\omega_Y}{dt} = +I_X\omega_X\omega_Y\tan\theta + I_Z\omega_Z\omega_X \tag{15}$$

$$\big(I_Z + Ma^2\big)\frac{d\omega_Z}{dt} = +Ma^2\omega_X\omega_Y \tag{16}$$

となる。ただし、$I_X = \frac{1}{4}Ma^2$, $I_Z = \frac{1}{2}Ma^2$ である。角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と方位角 (θ, ϕ, ψ) との関係は、式 (11) より、

$$\omega_X = \dot{\theta}, \qquad \omega_Y = \dot{\phi}\cos\theta, \qquad \omega_Z = \dot{\psi} - \dot{\phi}\sin\theta$$

なので、

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_X, \tag{17}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\cos\theta}\,\omega_Y, \tag{18}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_Z + \tan\theta\,\omega_Y \tag{19}$$

を得る。

4　物理量

重心速度と重心位置

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\omega} \times \big(-a\boldsymbol{e}_Y\big) = a\big(-\omega_Z\boldsymbol{e}_X + \omega_X\boldsymbol{e}_Z\big)$$

$$\dot{x} = v_x = a\big(-\omega_Z\cos\phi + \omega_X\cos\theta\sin\phi\big)$$

$$\dot{y} = v_y = -a\omega_X\sin\theta$$

$$\dot{z} = v_z = a\big(\omega_Z\sin\phi + \omega_X\cos\theta\cos\phi\big)$$

床との接点

$$\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}\,; \qquad x_c = x - a\sin\theta\sin\phi, \quad z_c = z - a\sin\theta\cos\phi$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x}_c & = -a\big(\tan\theta\omega_Y + \omega_Z\big)\cos\phi = -a\dot{\psi}\cos\phi \\ \dot{z}_c & = +a\big(\tan\theta\omega_Y + \omega_Z\big)\sin\phi = +a\dot{\psi}\sin\phi \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad v_c = a|\dot{\psi}|$$

エネルギー

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t\hat{I}\boldsymbol{\omega} + Mg(-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{e}_y \ = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t\hat{I}\boldsymbol{\omega} + Mga\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}Ma^2\big(\omega_X^2 + \omega_Z^2\big) + \frac{1}{2}\Big(I_X(\omega_X^2 + \omega_Y^2) + I_Z\omega_Z^2\Big) + Mga\cos\theta
\end{aligned}
$$

抗力

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + Mg\boldsymbol{e}_y \ = Ma\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_Y\big) + Mg\boldsymbol{e}_y \\
&= Ma\Big(-\big(\dot{\omega}_Z - \omega_X\omega_Y\big)\boldsymbol{e}_X - \big(\omega_X^2 - \omega_Y\omega_Z\tan\theta\big)\boldsymbol{e}_Y + \big(\dot{\omega}_X + \omega_Y\omega_Z\big)\boldsymbol{e}_Z\Big) + Mg\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_x &= Ma\Big(-\big(\dot{\omega}_Z - \omega_X\omega_Y\big)\cos\phi - \big(\omega_X^2 - \omega_Y\omega_Z\tan\theta\big)\sin\theta\sin\phi + \big(\dot{\omega}_X + \omega_Y\omega_Z\big)\cos\theta\sin\phi\Big) \\
R_y &= Ma\Big(-\big(\omega_X^2 - \omega_Y\omega_Z\tan\theta\big)\cos\theta - \big(\dot{\omega}_X + \omega_Y\omega_Z\big)\sin\theta\Big) + Mg \\
R_z &= Ma\Big(\big(\dot{\omega}_Z - \omega_X\omega_Y\big)\sin\phi - \big(\omega_X^2 - \omega_Y\omega_Z\tan\theta\big)\sin\theta\cos\phi + \big(\dot{\omega}_X + \omega_Y\omega_Z\big)\cos\theta\cos\phi\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &\equiv \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \ = Ma\sqrt{\big(\dot{\omega}_Z - \omega_X\omega_Y\big)^2 + \Big(\omega_X^2\sin\theta - \dot{\omega}_Z\cos\theta - \frac{\omega_Y\omega_Z}{\cos\theta}\Big)^2} \\
N &\equiv R_y \ = -Ma\Big(\omega_X^2\cos\theta + \dot{\omega}_X\sin\theta\Big) + Mg
\end{aligned}
$$

コインの向き： $(\theta,\phi,\psi)=0$ のときは、コインは $x-z$ 面内で Z 軸は y 軸と逆向きに向いている。その状態のコインを (θ,ϕ,ψ) の向きにするには

1. z 軸回りに ψ 回転
2. x 軸回りに θ 回転
3. y 軸回りに ϕ 回転

すればよい。

$\boldsymbol{n}$ 軸方向に θ 回転する、４元数を用いた回転演算子 $\hat{R}$ は、

$$\hat{R}(\boldsymbol{n},\theta)=\cos\frac{\theta}{2}+\hat{n}\sin\frac{\theta}{2}\,;\quad \hat{n}\equiv n_x\hat{i}+n_y\hat{j}+n_z\hat{k}$$

で与えられるので、この回転を表す演算子 $\hat{R}$ は

$$\begin{aligned}\hat{R}=&\hat{R}(\boldsymbol{e}_y,\phi)\hat{R}(\boldsymbol{e}_x,\theta)\hat{R}(\boldsymbol{e}_z,\psi)\\ &\hat{R}(\boldsymbol{e}_z,\psi)=\cos\frac{\psi}{2}+\hat{k}\sin\frac{\psi}{2}\\ &\hat{R}(\boldsymbol{e}_x,\theta)=\cos\frac{\theta}{2}+\hat{i}\sin\frac{\theta}{2}\\ &\hat{R}(\boldsymbol{e}_y,\phi)=\cos\frac{\phi}{2}+\hat{j}\sin\frac{\phi}{2}\end{aligned}$$

で与えられる。

ただし、４元数とは $\hat{i},\,\hat{j},\,\hat{k}$、および１を基底とする複素数を拡張したもので、基底は演算規則

$$\hat{i}^2=\hat{j}^2=\hat{k}^2=-1,\qquad \hat{i}\,\hat{j}=-\hat{j}\,\hat{i}=\hat{k},\quad \hat{j}\,\hat{k}=-\hat{k}\,\hat{j}=\hat{i},\quad \hat{k}\,\hat{i}=-\hat{i}\,\hat{k}=\hat{j}$$

に従う。

5　定常解とその安定性解析

角運動量の変化率がゼロとなる定常解とその安定性を求める。以下、式を簡単にするために、$M = a = g = 1$ として、無次元化した単位系で式を扱う。すると、

$$I_X = I_Y = \frac{1}{4}, \quad I_Z = \frac{1}{2}$$

で、運動方程式は、

$$\begin{cases} \dot{\omega}_X &= -\frac{6}{5}\omega_Y\omega_Z - \frac{1}{5}\omega_Y^2 \tan\theta + \frac{4}{5}\sin\theta \\ \dot{\omega}_Y &= \omega_X\omega_Y \tan\theta + 2\omega_Z\omega_X \\ \dot{\omega}_Z &= \frac{2}{3}\omega_X\omega_Y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\theta} &= \omega_X \\ \dot{\phi} &= \omega_Y \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \dot{\psi} &= \omega_Z + \omega_Y \tan\theta \end{cases}$$

で与えられる。

定常解は、

$$\begin{cases} 0 &= -\frac{6}{5}\omega_Y\omega_Z - \frac{1}{5}\omega_Y^2 \tan\theta + \frac{4}{5}\sin\theta \\ 0 &= \omega_X\omega_Y \tan\theta + 2\omega_Z\omega_X \\ 0 &= \frac{2}{3}\omega_X\omega_Y \end{cases}$$

より、

1. $\omega_X = \omega_Y = \theta = 0, \quad \omega_Z = \text{ const.}$

2. $\omega_X = 0, \quad \big(\omega_Z,\ \theta\big) = \text{ const.}, \quad \omega_Y = f^{\pm}(\omega_Z, \theta) \equiv \dfrac{1}{\tan\theta}\left(-3\omega_Z \pm \sqrt{9\omega_Z^2 + 4\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}\right)$

   $f^{\pm}(\omega_Z, \theta)$ には、

   $$f^{\pm}(\omega_Z, \theta) = -f^{\mp}(-\omega_Z, \theta) = f^{\mp}(-\omega_Z, -\theta)$$

   の対称性があるので、$\omega_Z,\, \theta > 0$ としてもよい。

定常解１： 真っ直ぐ進む解

$$\omega_Z = \omega_{Z,0} \ = \text{const.}, \quad \omega_X = \omega_Y = \theta = 0$$

定常解２： 重心が静止したまま回転する解：$\boldsymbol{F} = 0,\ \boldsymbol{R} = -M\boldsymbol{g}$

$$\omega_X = \omega_Z = 0, \quad \omega_Y = 2\sqrt{\cos\theta_0}, \quad \theta = \theta_0, \qquad \dot{\phi} = \frac{2}{\sqrt{\cos\theta_0}}$$

接点の軌跡の半径：R_C

$$R_C = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}} = \sin\theta_0$$

定常解３： 円運動する解

$$\omega_X = 0,\ \omega_Z = \omega_{Z,0},\ \theta = \theta_0, \quad \omega_Y = \omega_{Y,0} \equiv \frac{3\,\omega_{Z,0}}{\tan\theta_0}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{9}\,\frac{\tan\theta_0}{\omega_{Z,0}^2}\,\sin\theta_0}\right)$$

重心の軌跡の半径：R_G、接点の軌跡の半径：R_C

$$\begin{aligned} R_G &= \left|\frac{\omega_Z}{\dot\phi}\right| = \left|\frac{\omega_{Z,0}}{\omega_{Y,0}}\,\cos\theta_0\right| = \frac{3}{4}\,\frac{\omega_{Z,0}^2}{\tan\theta_0}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{9}\,\frac{\tan\theta_0}{\omega_{Z,0}^2}\,\sin\theta_0}\ \pm 1\right) \\ R_C &= \left|\frac{\dot\psi}{\dot\phi}\right| = \left|\frac{\omega_{Z,0}}{\omega_{Y,0}}\,\cos\theta_0 + \sin\theta_0\right| \\ &= \left|\frac{3}{4}\,\frac{\omega_{Z,0}^2}{\tan\theta_0}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{9}\,\frac{\tan\theta_0}{\omega_{Z,0}^2}\,\sin\theta_0} \pm 1\right) \pm \sin\theta_0\right| \end{aligned}$$

定常解４： 大きな円運動

$$\omega_X = 0,\ \omega_Z = \omega_{Z,0},\ \theta = \theta_0 \ll 1$$

,

$$\begin{aligned} \omega_Y = \omega_{Y,0} &\equiv \frac{3\,\omega_{Z,0}}{\tan\theta_0}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{9}\,\frac{\tan\theta_0}{\omega_{Z,0}^2}\,\sin\theta_0}\ - 1\right) \approx \frac{2}{3}\,\frac{\sin\theta_0}{\omega_{Z,0}} \\ R_G = \frac{3}{4}\,\frac{\omega_{Z,0}^2}{\tan\theta_0}&\left(\sqrt{1 + \frac{4}{9}\,\frac{\tan\theta_0}{\omega_{Z,0}^2}\,\sin\theta_0}\ + 1\right) \approx \frac{3}{2}\,\frac{\omega_{Z,0}^2}{\sin\theta_0} \approx \frac{\omega_{Z,0}}{\omega_{Y,0}} \end{aligned}$$

5.1 定常解１：

$\omega_Z = \omega_{Z,0}\ = \text{const.}, \quad \omega_X = \omega_Y = \theta = 0$

これからの微小なズレを

$$\omega_X = \delta\omega_X, \quad \omega_Y = \delta\omega_Y, \quad \omega_Z = \omega_{Z,0} + \delta\omega_Z, \quad \theta = \delta\theta$$

とすると、

$$\begin{cases} \delta\dot\omega_X &= -\frac{6}{5}\omega_{Z,0}\delta\omega_Y + \frac{4}{5}\delta\theta \\ \delta\dot\omega_Y &= 2\omega_{Z,0}\delta\omega_X \\ \delta\dot\omega_Z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta\dot\theta &= \delta\omega_X \\ \delta\dot\phi &= \delta\omega_Y \\ \dot\psi &= \omega_{Z,0} \end{cases}$$

$(\delta\omega_X, \delta\omega_Y, \delta\theta) = (A_X, A_Y, A_\theta)e^{\lambda t}$ と置くと、

$$\lambda\boldsymbol{A} = \hat\Lambda\boldsymbol{A}\,; \qquad \hat\Lambda \equiv \begin{pmatrix} 0, & -\frac{6}{5}\omega_{Z,0}, & \frac{4}{5} \\ 2\omega_{Z,0}, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

特性方程式

$$\lambda\left(\lambda^2 + \frac{12}{5}\omega_{Z,0}^2 - \frac{4}{5}\right) = 0$$

固有値

$$\lambda = 0, \quad \pm\sqrt{\frac{4}{5}\bigl(1 - 3\omega_{Z,0}^2\bigr)}$$

安定性条件: $\omega_{Z,0} < \omega_c$ のとき不安定、$\omega_{Z,0} \geqq \omega_c$ のとき中立。任意の半径の円を描く軌道が存在し、それに対して復元力がないため、小さな摂動に対しても円軌道に遷移する。ただし、$\omega_c \equiv 1/\sqrt{3} \approx 0.577$.

5.2 定常解２：

$\omega_X = 0$, $(\omega_Y, \omega_Z, \theta) \neq 0$ の定数で

$$I_X \omega_Y^2 \tan\theta + \bigl(I_Z + Ma^2\bigr)\omega_Y \omega_Z - Ma^2 \frac{g}{a} \sin\theta = 0$$

を満たす。解を

$$\omega_X = \delta\omega_X, \quad \omega_Y = \omega_{Y,0} + \delta\omega_X, \quad \omega_Z = \omega_{Z,0} + \delta\omega_X, \quad \theta = \theta_0 + \delta\theta$$

と置くと、