4/25, 2024. Hiizu Nakanishi

ラトルバックのダイナミクス

ラトルバックの底面は2次曲面で近似できるが、その主曲率の方向は慣性主軸の方向とずれている。このラトルバックのダイナミクスを記述するために、原点が重心Gで慣性主軸を座標軸とするラトルバックに固定された座標軸 XYZ を持つ座標系と、床面が xy 平面、鉛直上向きを z 軸とする空間に固定された xyz 座標系を考える。

XYZ 系において慣性モーメントテンソル $\hat{I}$ は対称行列になり

$$\hat{I} := \begin{pmatrix} A, & 0, & 0 \\ 0, & B, & 0 \\ 0, & 0, & C \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。一方、底面の形状を関数 $f(\boldsymbol{R})$ を用いて

$$f(\boldsymbol{R}) = 0$$

と表す。関数 $f(\boldsymbol{R})$ を、非対角行列 $\hat{\Theta}_\xi$ を用いて

$$f(\boldsymbol{R}) := -1 + \frac{1}{a^2}\big(X, Y, Z\big)\hat{\Theta}_\xi \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -1 + \frac{1}{a^2}\,\boldsymbol{R}^t\,\hat{\Theta}_\xi \boldsymbol{R} \tag{1}$$

と与える。慣性主軸と楕円体の主軸の方向のずれの角度を角度 ξ とすると、行列 $\hat{\Theta}_\xi$ は

$$\hat{\Theta}_\xi := \hat{R}(\xi)\hat{\Theta}\hat{R}(\xi)^{-1}, \qquad \hat{\Theta} := \begin{pmatrix} \theta, & 0, & 0 \\ 0, & \phi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}(\xi) := \begin{pmatrix} \cos\xi, & -\sin\xi, & 0 \\ \sin\xi, & \cos\xi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。重心は楕円体の中心にあるとして、a はラトルバックを水平においたときの重心Gの高さで、底面の主曲率は θ/a、および ϕ/a である。これらのパラメタは、通常のラトルバックでは、

$$\xi \ll 1, \qquad A > B, \qquad 1 > \theta \gg \phi > 0$$

である。

運動方程式：ラトルバックの重心の速度を $\boldsymbol{v}_G$、回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすると、重心の並進及び回転運動の方程式は、

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} = \boldsymbol{F} - Mg\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{2}$$

$$\frac{d\big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big)}{dt} = \boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{F}; \quad \boldsymbol{R}_C := \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_G \tag{3}$$

と与えられる。ここで、$\boldsymbol{F}$ は床からの抗力、$\boldsymbol{R}_C$ は重心Gから床との接点Cに向かうベクトルである。

接点の位置ベクトル $\boldsymbol{R}_C$ は、接点Cがラトルバックの底面の点であることと、接点における法線ベクトルが床に垂直、すなわち鉛直方向を向いているという2つの条件

$$f(\boldsymbol{R}_C) = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{R}_C) \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{4}$$

で決まる。

一方、抗力 $\boldsymbol{F}$ はスリップなし条件

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} \tag{5}$$

より決まる。

運動方程式の解法：並進と回転の運動方程式より抗力 $\boldsymbol{F}$ を消去して、

$$\frac{d\big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big)}{dt} = \boldsymbol{R}_C \times M\left(\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}\big) + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)$$

ここで、ベクトル $\boldsymbol{R}_C$ および $\boldsymbol{\omega}$ を XYZ 座標系で表わすと、時間微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{d\big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big)}{dt} &= \hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big) \\
\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}\big) &= \frac{\partial}{\partial t}\big(\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}\big) + \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}\big) \\
&= \dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega}\big) \\
&= \dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \omega^2\boldsymbol{R}_C - \big(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C\big)\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

となる。ただし、XYZ 系での時間微分を

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} := \dot{\boldsymbol{a}} := \dot{a}_X\hat{\boldsymbol{e}}_X + \dot{a}_Y\hat{\boldsymbol{e}}_Y + \dot{a}_Z\hat{\boldsymbol{e}}_Z$$

と表記する。

すると運動方程式は、

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big) = M\boldsymbol{R}_C \times \Big(\dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \omega^2\boldsymbol{R}_C - \big(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C\big)\boldsymbol{\omega} + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\Big)$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} - M\boldsymbol{R}_C \times \big(\boldsymbol{R}_C \times \dot{\boldsymbol{\omega}}\big) &= -\boldsymbol{\omega} \times \big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big) + M\boldsymbol{R}_C \times \Big(\dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega} + \omega^2\boldsymbol{R}_C - \big(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C\big)\boldsymbol{\omega} + g\hat{\boldsymbol{e}}_z\Big) \\
\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} - M\Big(\big(\boldsymbol{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}\big)\boldsymbol{R}_C - R_C^2\dot{\boldsymbol{\omega}}\Big) &= -\boldsymbol{\omega} \times \big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big) + M\Big(\boldsymbol{R}_C \times \big(\dot{\boldsymbol{R}}_C \times \boldsymbol{\omega}\big) - \big(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C\big)\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\Big) \\
&= -\boldsymbol{\omega} \times \big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big) + M\Big(\big(\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega}\big)\dot{\boldsymbol{R}}_C - \big(\boldsymbol{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_C\big)\boldsymbol{\omega} - \big(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C\big)\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\Big) \\
\hat{I}_C\dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\boldsymbol{\omega} \times \big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big) + M\Big(\big(\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega}\big)\dot{\boldsymbol{R}}_C - \big(\boldsymbol{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_C\big)\boldsymbol{\omega} - \big(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C\big)\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\Big)
\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \hat{I}_C^{-1}\bigg(-\boldsymbol{\omega} \times \big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big) + M\Big(\big(\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega}\big)\dot{\boldsymbol{R}}_C - \big(\boldsymbol{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_C\big)\boldsymbol{\omega} - \big(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C\big)\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\Big)\bigg)$$

ここで、$\hat{I}_C$ は接点 C を中心とする慣性モーメントテンソル：

$$\hat{I}_C := \begin{pmatrix} A + M\big(R_C^2 - X_C^2\big), & -MX_CY_C, & -MX_CZ_C \\ -MY_CX_C, & B + M\big(R_C^2 - Y_C^2\big), & -MY_CZ_C \\ -MZ_CX_C, & -MZ_CY_C, & C + M\big(R_C^2 - Z_C^2\big) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{d\boldsymbol{r}_G}{dt} &= \boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} \\
\quad\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \hat{I}_C^{-1}\bigg(-\boldsymbol{\omega} \times \big(\hat{I}\boldsymbol{\omega}\big) + M\Big(\big(\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\omega}\big)\dot{\boldsymbol{R}}_C - \big(\boldsymbol{R}_C \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_C\big)\boldsymbol{\omega} \\
& \qquad - \big(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_C\big)\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{R}_C \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\Big)\bigg) \\
\dfrac{dR_q}{dt} &= \dfrac{1}{2}R_q\omega_q\,; \qquad R_q : \text{剛体固定系から実験室系への回転を表す四元数}
\end{cases}$$

接点の位置 $\boldsymbol{R}_C$ とその時間微分 $\dot{\boldsymbol{R}}_C$

$$f(\boldsymbol{R}) := -1 + \frac{1}{a^2}(X,Y,Z)\hat{\Theta}_\xi \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -1 + \frac{1}{a^2}\boldsymbol{R}^t \hat{\Theta}_\xi \boldsymbol{R}$$

$$\hat{\Theta}_\xi := \hat{R}(\xi)\hat{\Theta}\hat{R}(\xi)^{-1}, \qquad \hat{\Theta} := \begin{pmatrix} \theta, & 0, & 0 \\ 0, & \phi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}(\xi) := \begin{pmatrix} \cos\xi, & -\sin\xi, & 0 \\ \sin\xi, & \cos\xi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{2}{a^2}\hat{\Theta}_\xi \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{2}{a^2}\hat{\Theta}_\xi \boldsymbol{R}$$

より、

$$\boldsymbol{\nabla} f \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_z \quad \Rightarrow \boldsymbol{e}_z = \frac{e_{zZ}}{Z_C}\hat{\Theta}_\xi \boldsymbol{R}_C \quad \Rightarrow \boldsymbol{R}_C = \frac{Z_C}{e_{zZ}}\hat{\Theta}_\xi^{-1}\boldsymbol{e}_z$$

また、$f(\boldsymbol{R}_C) = 0$ より、

$$a^2 = \boldsymbol{R}_C^t \hat{\Theta}_\xi \boldsymbol{R}_C = \left(\frac{Z_C}{e_{zZ}}\right)^2 \boldsymbol{e}_z^t \hat{\Theta}_\xi^{-1}\boldsymbol{e}_z \quad \Rightarrow \quad Z_C = -a\, e_{zZ} \left(\boldsymbol{e}_z^t \hat{\Theta}_\xi^{-1}\boldsymbol{e}_z\right)^{-1/2}$$

時間微分：

$$\dot{\boldsymbol{R}}_C = \left(\frac{\dot{Z}_C}{e_{zZ}} - \frac{Z_C \dot{e}_{zZ}}{e_{zZ}^2}\right)\hat{\Theta}_\xi^{-1}\hat{\boldsymbol{e}}_z + \frac{Z_C}{e_{zZ}}\hat{\Theta}_\xi^{-1}\dot{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_z = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_z$$

$$a^2 = \boldsymbol{R}_C^t \hat{\Theta}_\xi \boldsymbol{R}_C \quad \Rightarrow \ 0 = \dot{\boldsymbol{R}}_C^t \hat{\Theta}_\xi \boldsymbol{R}_C = \dot{\boldsymbol{R}}_C^t \frac{Z_C}{e_{zZ}}\boldsymbol{e}_z \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{e}_z \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_C = 0$$

これに上の式を代入して、

$$\left(\frac{\dot{Z}_C}{Z_C} - \frac{\dot{e}_{zZ}}{e_{zZ}}\right)\boldsymbol{e}_z^t \boldsymbol{R}_C = -\frac{Z_C}{e_{zZ}}\boldsymbol{e}_z^t \hat{\Theta}_\xi^{-1}\dot{\boldsymbol{e}}_z = -\boldsymbol{R}_C^t \dot{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\therefore \ \dot{Z}_C = Z_C\left(\frac{\dot{e}_{zZ}}{e_{zZ}} - \frac{\dot{\boldsymbol{e}}_z^t \boldsymbol{R}_C}{\boldsymbol{e}_z^t \boldsymbol{R}_C}\right) = Z_C\left(\frac{\dot{e}_{zZ}}{e_{zZ}} - \frac{Z_C}{e_{zZ}a^2}\dot{\boldsymbol{e}}_z^t \boldsymbol{R}_C\right)$$

これは以前の表式と同じ。

パラメーター：

- Geometrical parameters:
$$a[\mathrm{L}] = 1, \quad \theta,\ \phi, \quad \xi$$
- Physical properties:
$$M[\mathrm{M}] = 1, \quad A,\ B,\ C,\ [\mathrm{ML}^2]$$
- Physical constants:
$$g[\mathrm{LT}^{-2}] = 1$$
- Auxiliary parameters:
$$L_x,\ r_x,\ L_y,\ r_y\ [\mathrm{L}], \quad \rho\ [\mathrm{ML}^{-3}]$$
$$\hat{I}, \quad \hat{\Theta},\ \hat{\Theta}_\xi, \quad R_\xi$$

変数：

$$\boldsymbol{r}_G, \quad \boldsymbol{\omega}, \quad R_q$$
$$\boldsymbol{R}_C, \quad \boldsymbol{e}_z, \quad \hat{I}_C$$

質量と慣性モーメントテンソル

$$\begin{aligned}
&M = M_x + M_y = 1; \qquad M_x = \pi r_x^2 L_x \rho, \quad M_y = \pi r_y^2 L_y \rho \\
&A = \frac{1}{12} M_y L_y^2; \qquad M_y = \frac{r_y^2 L_y}{r_x^2 L_x + r_y^2 L_y}\, M \\
&B = \frac{1}{12} M_x L_x^2; \qquad M_x = \frac{r_x^2 L_x}{r_x^2 L_x + r_y^2 L_y}\, M \\
&C = A + B
\end{aligned}$$

座標系の関係： $A_q^S = R_q A_q^B R_q^{-1}$

$$e_{zX}\hat{i} + e_{zY}\hat{j} + e_{zZ}\hat{k} = R_q^{-1}\hat{k}\, R_q$$

$$\begin{aligned}
e_{Xx}\hat{i} + e_{Xy}\hat{j} + e_{Xz}\hat{k} &= R_q\, \hat{i} R_q^{-1} \\
e_{Yx}\hat{i} + e_{Yy}\hat{j} + e_{Yz}\hat{k} &= R_q\, \hat{j} R_q^{-1} \\
e_{Zx}\hat{i} + e_{Zy}\hat{j} + e_{Zz}\hat{k} &= R_q\, \hat{k} R_q^{-1}
\end{aligned}$$

エネルギー

$$E = K + U; \qquad K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t \hat{I}\, \boldsymbol{\omega}, \quad U = -Mg\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{e}_z$$

X 軸回りの微小振動（縦揺れ、ピッチング）:

$\xi = 0$ の場合の縦揺れ振動を、

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0), \quad \boldsymbol{R}_C \approx (0, Y_C, -a), \quad \boldsymbol{e}_z \approx (0, u, 1)$$

として、微小量 ω, Y_C, u の 1 次の近似で、X 軸周りの微小振動の周期を求める。

鉛直方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z$ の XYZ 座標系の成分は、方程式

$$\frac{d\boldsymbol{e}_z}{dt} = \dot{\boldsymbol{e}}_z + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{u} \approx \omega \tag{6}$$

に従う。

また、$Z_C \approx -a$, $e_{zZ} \approx 1$, $\dot{Z}_C \approx 0$, $\dot{e}_{zZ} \approx 0$ なので、

$$Y_C \approx -a\phi^{-1}u, \qquad \dot{Y}_C \approx a\phi^{-1}\omega$$

と近似できる。

これらを用いて、ω の方程式を求めると、微小量の 1 次の近似で

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &\approx \frac{M}{A + Ma^2}\, g\, (0, Y_C, -a) \times (0, u, 1)\big|_X = \frac{Ma^2}{A + Ma^2}\, \frac{g}{a^2}\, \big(Y_C + au\big) \\ &= -\frac{Ma^2}{A + Ma^2}\, \frac{g}{a}\, \big(\phi^{-1} - 1\big)u\end{aligned}$$

を得る。上の u の式 (6) と合わせて、

$$\ddot{\omega} \approx -\frac{Ma^2}{A + Ma^2}\, \frac{g}{a}\, \big(\phi^{-1} - 1\big)\omega$$

となり、縦揺れ振動の周期として、

$$T_{\text{pitch}} \approx 2\pi \sqrt{\left(\frac{A}{Ma^2} + 1\right) \frac{1}{\phi^{-1} - 1}\, \frac{a}{g}}$$

をえる。

Y 軸回りの微小振動（横揺れ、ローリング）:

同様に、横揺れ振動の周期は

$$T_{\text{roll}} \approx 2\pi \sqrt{\left(\frac{B}{Ma^2} + 1\right) \frac{1}{\theta^{-1} - 1}\, \frac{a}{g}}$$